普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 1-1

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著

人民教育出版社

B版

本册导引

同学们：

祝贺你已经完成了高中数学必修课程5个模块的学习任务，具备了高中数学的基础知识和技能，为进一步深造奠定了基石．同时，我们还特别欢迎你进入高中数学选修课程系列1-1模块的学习，在这里，将为你所选的在人文、社会科学等方向发展的志趣、理想进行更加丰厚、深入的充实，为你自身发展的逐步丰富和完善，积淀较高的数学素养，以满足个人发展与社会进步的需要．

本模块内容是高中数学选修课程的基础，共设有三章：常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、导数及其应用．

正确地使用逻辑用语是当代社会公民应该具备的基本素质．无论你从事哪项事业、干什么样工作，都要进行思考、交流，因而必然需要正确地运用逻辑用语表达自己的思想．在本模块的第一章中，你将会在已有的数学知识基础上，学习常用逻辑用语，体会逻辑用语在表达和论证中的作用，并学会利用这些逻辑用语准确地表达数学内容，更好地进行交流．

在本模块的第二章中，你会在数学2平面解析几何初步的基础上，进一步学习圆锥曲线与方程，了解圆锥曲线与二次方程的关系，掌握圆锥曲线的几何性质，感受圆锥曲线在客观世界中的应用，进一步体会数形结合的思想．

微积分的创立是数学发展史上的一个里程碑，它的发展和广泛应用开创了向近代数学过渡的新时期，它为深入研究变量与函数提供了重要的手段和方法．在微积分中，导数是核心概念之一，它有极其丰富的实际背景和广泛的应用．在本模块的第三章中，你会从大量实例的分析研讨中，逐步经历不同变化率对现实问题的不同刻画过程，从中理解导数的含义，体会导数的思想内涵；并学习应用导数深入研究函数的单调、极值等性质和解决实际问题，从而感受导数的重要作用，初步体会微积分的产生在人类文化发展史上的价值．

在本模块的学习中，你只要注意从实际例子入手，着眼于了解丰富背景、理解概念涵义，立足于把握数学表达、领略数学思想、体会数学应用；再加上你自己的勤奋努力实践，刻苦思考探究，你一定可以在不断耕耘、不断攀登的前进道路上，逐步领略到数学王国里的特殊而神奇的乐趣，并日益增长你的数学才干的．我们相信，你一定会而且一定能怀着满腔热情和极大兴趣学好这一模块内容的．预祝你成功！

主　　编　　高存明

本册主编　　李建才

编　　者　　李建才　邱万作　罗声雄
　　　　　　高存明　房良孙　段发善

责任编辑　　王旭刚

美术编辑　　李宏庆　王　喆

封面设计　　李宏庆

普通高中课程标准实验教科书

数　学

选修 1—1

B 版

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

*

出版发行

（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

网址：http://www.pep.com.cn

××××印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：　毫米×　毫米　1/16　印张：7.25　字数：161 000

2007 年 4 月第 2 版　　　年　月第　次印刷

印数：00 001～000 000 册

ISBN 978-7-107-18626-4
G・11716（课）　定价：　元

目　录

第一章 常用逻辑用语

1.1 命题与量词

1.2 基本逻辑联结词

1.3 充分条件、必要条件与命题的四种形式

你已经学习了不少数学知识，是否觉得数学是很美的学科，数学结论能给你准确、严格的思考，数学精神能使你一丝不苟、追求完满．但是在做数学中，有时也会发生一些同数学思想格格不入的事情．例如，考察以下推导：

设 $a=b$，则有

$$
\begin{aligned}
&a^2=ab\\
\Rightarrow\ &a^2-b^2=ab-b^2\\
\Rightarrow\ &(a+b)(a-b)=b(a-b)\\
\Rightarrow\ &a+b=b\\
\Rightarrow\ &2b=b\\
\Rightarrow\ &2=1.
\end{aligned}
$$

这是怎么回事？哪儿出错了，还是数学失灵了呢？你要找出问题及其原因，就要学习逻辑，学会用正确的逻辑规则去检验推导过程，去分析导出结论．

本章将以你已有的数学知识为基础，学习常用的逻辑用语及其符号化表达方式．逻辑用语与集合语言一样，是数学中的通用语言．学好这一章，就可以为你今后进一步学好数学打下基础，并提高你的逻辑分析、数学表达和逻辑思维能力．

1.1 命题与量词

1.1.1 命　题

在数学中，我们常常碰到许多用语言、符号或式子表达的语句，例如：

（1）$\lg 100=2$；

（2）所有无理数都是实数；

（3）垂直于同一条直线的两个平面平行；

（4）函数 $y=2x+1$ 是单调增函数；

（5）设 a，b，c，d 是任意实数．如果 $a>b$，$c>d$，那么 $ac>bd$；

（6）$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$（$\alpha$，$\beta$ 是任意角）．

这些语句都是可以判断真假的，其中(1)(2)(3)(4)都是正确的(真)，(5)(6)都是不正确的(假)．

像这样一些能判断真假的语句就是我们初中已学习过的命题．

一个命题要么是真的，要么是假的，但不能同时既真又假，也不能模棱两可、无法判断其真假．

应该指出：(1) 并不是任何语句都是命题，只有那些能判断真假的语句才是命题．一般来说，疑问句、祈使句、感叹句都不是命题，如："三角函数是周期函数吗？""但愿每一个三次方程都有三个实数根！""指数函数的图象真漂亮！"等，都不是命题；(2) 在数学或其他科学技术中，还有一类陈述句也经常出现，如："每一个不小于 6 的偶数都是两个奇素数之和(哥德巴赫猜想)""在 2020 年前，将有人登上火星"等，虽然目前还不能确定这些语句的真假，但是随着科学技术的发展与时间的推移，总能确定它们的真假，人们把这一类猜想仍算为命题．

一个命题，一般可用一个小写英文字母表示，如：p，q，r，…．

练习A

1. 判断下列语句是不是命题：

（1）$2+2\sqrt{2}$ 是有理数；

（2）$1+1>2$；

（3）非典型肺炎是怎样传染的？

（4）奇数的平方仍是奇数；

(5) 2^{100} 是个大数；

(6) 好人"一生平安"！

2. 判断下列命题的真假：

(1) 方程 $2x=5$ 只有一个解；

(2) 凡是质数都是奇数；

(3) 方程 $2x^2+1=0$ 有实数根；

(4) 函数 $y=\sin x$ 是周期函数；

(5) 每个数列都有周期.

练习B

1. 下列语句是不是命题：

(1) $(25-6)\times(35-8)=128$；

(2) 968 能被 11 整除.

2. 判断下列命题的真假：

(1) 0 不能作除数；

(2) 没有一个无理数不是实数；

(3) 如果空间的两直线不相交，则这两条直线平行；

(4) 集合 A 是集合 $A\cap B$ 的子集；

(5) 集合 A 是集合 $A\cup B$ 的子集；

(6) 空集是任何集合的子集.

1.1.2 量 词

前边已经讨论过，在数学中经常会见到一些含有变量 x 的语句，如 $x^2-1=0$，$5x-1$ 是整数等，可用符号 $p(x)$，$q(x)$，…表示. 由于不知道 x 代表什么数，无法判断它们的真假，因而它们不是命题. 然而，当赋予变量 x 某个值或一定的条件时，这些含有变量的语句又可以变成可判定真假的语句，从而成为命题. 例如：

$p(x)$：$x^2-1=0$，不是命题；

$q(x)$：$5x-1$ 是整数，也不是命题.

如果赋予变量 x 某个数值(如 $x=5$)，可以分别得出

$p(5)$：$5^2-1=0$；

$q(5)$：$5\times5-1$ 是一个整数.

想一想：$p(5)$，$q(5)$ 是命题吗？为什么？

如果在语句 $p(x)$ 或 $q(x)$ 前面加上"对所有整数 x"的条件，又可以得出：

p_1：对所有整数 x，$x^2-1=0$；

q_1：对所有整数 x，$5x-1$ 是整数.

思考与讨论

p_1，q_1 是命题吗？你能判断它们的真假吗？

这里，短语"所有"在陈述中表示所述事物的全体，逻辑中通常叫做**全称量词**，并用符号"$\forall$"表示．含有全称量词的命题，叫做**全称命题**.

事实上，全称命题就是陈述某集合所有元素都具有某种性质的命题，用符号表示上述两个全称命题为

p_1：$\forall x\in\mathbf{Z}$，$x^2-1=0$；(假)

q_1：$\forall x\in\mathbf{Z}$，$5x-1$ 是整数.（真）

一般地，设 $p(x)$ 是某集合 M 的所有元素都具有的性质，那么全称命题就是形如"对 M 中的所有 x，$p(x)$"的命题．用符号简记为

$$\boxed{\forall x\in M,\ p(x).}$$

如果在语句 $p(x)$ 或 $q(x)$ 前面加上"有一个整数 x"的条件，还可以得到命题：

p_2：有一个整数 x，$x^2-1=0$；（真）（为什么?）

q_2：至少有一个整数 x，$5x-1$ 是整数.（真）

短语"有一个"或"有些"或"至少有一个"在陈述中表示所述事物的个体或部分，逻辑中通常叫做**存在量词**，并用符号"$\exists$"表示，含有存在量词的命题，叫做**存在性命题**.

事实上，存在性命题就是陈述在某集合中有(存在)一些元素具有某种性质的命题，用符号表示上述两个存在性命题为

p_2：$\exists x\in\mathbf{Z}$，$x^2-1=0$；（真）

q_2：$\exists x\in\mathbf{Z}$，$5x-1$ 是整数.（真）

一般地，设 $q(x)$ 是某集合 M 的有些元素 x 具有的某种性质，那么存在性命题就是形如"存在集合 M 中的元素 x，$q(x)$"的命题，用符号简记为

$$\boxed{\exists x\in M,\ q(x).}$$

例　试判断以下命题的真假：

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2>0$；

(2) $\forall x\in\mathbf{N}$，$x^4\geqslant 1$；

(3) $\exists x\in\mathbf{Z}$，$x^3<1$；

(4) $\exists x\in\mathbf{Q}$，$x^2=3$.

分析：要判定一个全称命题是真命题，必须对限定集合 M 中的每个元素 x 验证 $p(x)$ 成立；但要判定全称命题是假命题，却只要能举出集合 M 中的一个 $x=x_0$，使得 $p(x_0)$ 不成立即可.（这就是通常所说的“举出一个反例”.）

要判定一个存在性命题是真命题，只要在限定集合 M 中，能找到一个 $x=x_0$，使 $p(x_0)$ 成立即可；否则，这一存在性命题就是假命题.

解：(1) 由于 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2\geqslant 0$，因而有 $x^2+2\geqslant 2>0$，即 $x^2+2>0$. 所以，命题

“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2>0$”是真命题.

(2) 由于 $0\in\mathbf{N}$，当 $x=0$ 时，$x^4\geqslant 1$ 不成立. 所以命题

“$\forall x\in\mathbf{N}$，$x^4\geqslant 1$”是假命题.

(3) 由于 $-1\in\mathbf{Z}$，当 $x=-1$ 时，能使 $x^3<1$. 所以命题

“$\exists x\in\mathbf{Z}$，$x^3<1$”是真命题.

(4) 由于使 $x^2=3$ 成立的数只有 $\pm\sqrt{3}$，而它们都不是有理数. 因此，没有任何一个有理数的平方能等于 3. 所以命题

“$\exists x\in\mathbf{Q}$，$x^2=3$”是假命题.

一个全称命题，可以包含多个变量，例如：全称命题

“$\forall a$，$b\in\mathbf{R}$，$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$”.

全称命题真，意味着对限定集合中的每一个元素都能具有某性质，使所给语句真. 因此，当给出限定集合中的任一个特殊的元素时，自然应导出“这个特殊元素具有这个性质”（这类似于“代入”思想）. 例如，正由于“$\forall a$，$b\in\mathbf{R}$，$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$”真，因此，当 $a=3$，$b=5$ 时，$(3+5)(9-15+25)=3^3+5^3$ 自然是正确的.

用以上思想去分析本章开头的“$2=1$”错误，就可以说清道理了. 由 $a=b$ 命题真，可以导出以下三个命题真：$a^2=ab$，$a^2-b^2=ab-b^2$，$(a+b)(a-b)=b(a-b)$. 但下一步导出 $a+b=b$ 是错误的，由于它引用了一个不真的全称命题“$\forall d\in\mathbf{R}$，等式两边可以除以 d”（因为 $d=0$ 时它是假命题）. 同样的错误是由 $2b=b$ 导出 $2=1$.

练习A

1. 判断下列语句是不是全称命题或者存在性命题，如果是，用量词符号表达出来：

(1) 中国的所有江河都流入太平洋；

(2) 0 不能作除数；

(3) 任何一个实数除以 1，仍等于这个实数；

(4) 每一个非零向量都有方向.

2. 判断下列命题的真假：

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-3x+2=0$；

(2) $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-1=0$；

(3) $\exists x\in\mathbf{Q}$，$x^2=2$；

(4) $4x^2=2x-1+3x^2$，$\forall x\in\mathbf{R}$.

练习B

1. 下列语句是不是命题：

(1) 人会“长生不老”；

(2) 有的人会“长生不老”；

(3) $\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin x<\tan x$；

(4) $\exists x\in\mathbf{R}$，$\sin x<\tan x$.

2. 判断下列命题的真假：

(1) 在平面直角坐标系中，任意有序实数对 (x,y)，都对应一点 P；

(2) 存在一个函数，既是偶函数又是奇函数；

(3) 每一条线段的长度都能用正有理数表示；

(4) 存在一个实数，使等式 $x^2+x+8=0$ 成立.

习题1-1 A

1. 下列语句是不是命题？如果是，注明其真假：

(1) 奇数不是偶数；

(2) 无理数是 $\sqrt{2}$；

(3) 有两个无理数的乘积等于有理数;

(4) 两个向量的夹角可以大于 $180°$.

2. 设语句 $q(x)$: $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$. 试回答下列问题:

(1) 写出 $q\left(\frac{\pi}{2}\right)$,并判定它是否是真命题?

(2) 写出"$\forall a\in \mathbf{R}$, $q(a)$",并判定它是否是真命题?

3. 下列语句是不是全称命题或者存在性命题:

(1) 有一个实数 a, a 不能取对数;

(2) 所有不等式的解集 A, 都有 $A\subseteq \mathbf{R}$;

(3) 三角函数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ 都是周期函数;

(4) 有的向量方向不定.

4. 用量词符号"$\forall$""$\exists$"表示下列命题:

(1) 实数都能写成小数形式;

(2) 凸 n 边形的外角和等于 2π;

(3) 任一个实数乘以 -1 都等于它的相反数;

(4) 对任意实数 x, 都有 $x^3>x^2$.

5. 判断下列命题的真假:

(1) $\forall x\in \mathbf{R}$, $x^2+x+1>0$;

(2) $\forall x\in \mathbf{Q}$, $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+1$ 是有理数;

(3) $\exists \alpha$, $\beta\in \mathbf{R}$, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$;

(4) $\exists x$, $y\in \mathbf{Z}$, $3x-2y=10$.

6. 试试看:

(1) 找一条你们班上所有学生共有的性质,把它写成一个全称真命题;

(2) 确定一条你们班上有些学生具有的性质,把它写成存在性真命题.

习题 1-1 B

1. 用全称量词或存在量词表示下列语句:

(1) 有理数都能写成分数形式;

(2) n 边形的内角和等于 $(n-2)\times 180°$;

(3) 两个有理数之间,都有另一个有理数;

(4) 有一个实数乘以任意一个实数都等于 0.

2. 举反例证明下列命题是假命题:

(1) $\forall x\in \mathbf{R}$, $|x|>0$;

(2) $\forall x\in \mathbf{R}$, $x^2+2x-3>0$.

3. 设 $p(x)$：$2^x>x^2$. 试问：

(1) 当 $x=5$ 时，$p(5)$是真命题吗？

(2) $p(-1)$是真命题吗？

4. 为使下列 $p(x)$ 为真命题，求 x 的取值范围：

(1) $p(x)$：$x+1>x$；

(2) $p(x)$：$x^2-5x+6>0$.

5. 下列各命题中变量的取值范围都为整数，试确定它们的真假：

(1) $\forall n$，$n^2\geqslant n$；　　(2) $\forall n$，$n^2<n$.

1.2 基本逻辑联结词

在自然语言中，我们经常使用联结词“且”“或”“非”等. 但这些词有时还可当副词. 当联结词使用时，表达的意义有时略有不同. 在逻辑或数学中使用这些词，是用来联结两个命题，构成一个新命题的，它有着精确的含义. 这些词在使用中，不能多义或引起歧义. 下面介绍数学或逻辑中使用联结词“且”“或”“非”的精确含义.

1.2.1 “且”与“或”

1. 且

逻辑联结词“且”与自然语言中的“并且”“及”“和”相当. 在自然语言中常用“且”联结两个语句. 例如，“他是共青团员，并且学习成绩全班第一”，这个语句表达的意义是，这个同学是共青团员，他的学习成绩又是全班第一. 显然，这个语句只有在以上两层意思都真时，它表达的才是真实的. 否则，只要有一层意思为假，它表达的就不是真实的.

设命题

p：2 是质数；　　　q：2 是偶数.

用“且”联结而构成新命题

2 是质数且是偶数.

一般地，用联结词“且”把命题 p 和 q 联结起来，就得到一个新命题，记作

$$p\wedge q,$$

读作“p 且 q”.

现在的问题是，如何由命题 p，q 的真假，来确定新命题 $p\wedge q$ 的真假呢？

联想自然语言中“并且”的含义，我们可以得出：

如果当 p，q 都是真命题时，则命题 $p\wedge q$ 是真的；如果 p，q 中，至少有一个是假命题时，则命题 $p\wedge q$ 是假的. 反过来，如果命题 $p\wedge q$ 是真命题，则 p，q 两个命题一定都是真的；如果 $p\wedge q$ 为假时，则 p，q 两个命题中至少有一个是假命题，即以下三种情况一定有一种情况出现：(1) p 真，q 假；(2) p 假，q 真；(3) p 假，q 假.

由“且”的含义，我们可以用“且”来定义集合 A 和集合 B 的交集：

$$A\cap B=\{x\mid(x\in A)\wedge(x\in B)\}.$$

注 在数理逻辑的书中，通常把如何判定 $p\wedge q$ 真假的几种情况总结成表Ⅰ：

表Ⅰ

p	q	$p\wedge q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

想想看，这张表是不是清楚地表达了如何由 p，q 的真、假，来确定 $p\wedge q$ 的真、假.

思考与讨论

如图1-1 所示，一个电路串联一个灯泡和两个开关 S_1、S_2. 当两个开关 S_1 和 S_2 都闭合时，灯就亮；当只有一个闭合或两个都不闭合时，灯都不会亮. 从中你能理解和体会逻辑联结词“且”的意义吗?

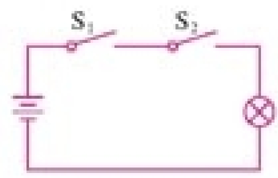


图 1-1

例 1 把下列各组命题用“且”联结组成新命题，并判定其真、假：

(1) p：$\lg 0.1<0$；q：$\lg 11>0$.

(2) p：$y=\cos x$ 是周期函数；q：$y=\cos x$ 是奇函数.

解：(1) 因为 $\lg 0.1<0$ 为真，$\lg 11>0$ 也为真，所以命题 $p\wedge q$ 为真.

(2) 因为 $y=\cos x$ 是周期函数为真命题，$y=\cos x$ 是奇函数是假命题，所以命题 $p\wedge q$为假.

2. 或

逻辑联结词“或”的意义和日常语言中的“或者”是相当的. 但日常语言中的“或者”有两类用法：其一是“不可兼”的“或”，如“向东或向西走”，这里不可能同时向东又向西；其二是“可兼”的“或”，如“要苹果或香蕉”，这里可以理解为要香蕉不要苹果，也可以理解为不要香蕉要苹果，还可理解为香蕉、苹果两者都要. 不可兼“或”的含义，在程序设计语言中被抽象为“异或”概念，这里暂不学习；这里仅研究可兼“或”在数学中的含义.

设命题

p：24 是 8 的倍数；　　q：24 是 9 的倍数.

用“或”联结，可得新命题

24 是 8 的倍数或 24 是 9 的倍数.

一般地，用联结词“或”把命题 p，q 联结起来，就得到一个新命题，记作

$$p \vee q,$$

读作“p 或 q”.

如何由命题 p 和命题 q 的真、假，来确定新命题 $p \vee q$ 的真、假呢？由于这里的“或”有“可兼”的含义，因此，我们规定：

当两个命题 p，q 中，至少有一个是真命题时，$p \vee q$ 就为真命题；只有当两个命题都为假时，$p \vee q$ 为假．反过来，如果命题 $p \vee q$ 为真时，则 p，q 中，至少有一个是真命题，即以下三种情况必有一种出现：（1）p 真，q 真；（2）p 真，q 假；（3）p 假，q 真．如果 $p \vee q$ 为假时，则 p，q 一定都是假命题．

由于命题 p：24 是 8 的倍数为真，命题 q：24 是 9 的倍数为假，所以新命题 $p \vee q$ 为真．

由“或”的含义，我们可以用“或”来定义集合 A 和集合 B 的并集：

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

注　在数理逻辑书中，通常把如何判定 $p \vee q$ 的真假的几种情况总结为表Ⅱ：

表Ⅱ

p	q	$p \vee q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

想想看，这张表是不是清楚地表达了如何由 p，q 的真假来确定 $p \vee q$ 的真假．

思考与讨论

如图 1-2 所示，一个电路并联两个开关 S_1、S_2，再串联一个灯泡．当两个开关 S_1、S_2 至少有一个闭合时，灯就亮；只有当两个开关都断开时，灯就不会亮．从中你体会到逻辑联结词“或”的意义了吗？

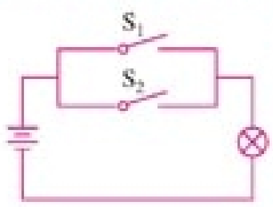


图 1-2

例 2　把下列各组命题用“或”联结成新命题，并判断它们的真假：

（1）p：$10=10$；　　q：$10<10$.

（2）p：$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$；　　q：$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$.

解：(1) 因为 $10=10$ 为真，$10<10$ 为假，所以命题 $p\vee q$ 是真命题.
(2) 因为 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{R}$ 为真命题，$\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$ 是真命题，所以命题 $p\vee q$ 是真命题.

练习A

1. 用“且”联结下列各组命题组成新命题，并分别判断它们的真假：
(1) p：28 是 2 的倍数；　　q：28 是 7 的倍数.
(2) p：11 是 143 的因数；　　q：11 是 1 001 的因数.
(3) p：$52<60$；　　q：$62>60$.
(4) p：2 是方程 $x-2=0$ 的根；　　q：2 是方程 $x+1=0$ 的根.

2. 请你自选已学过的两个数学命题 p，q，并用“$\wedge$”联结组成新命题“$p\wedge q$”，再判定其真假.

3. 将第 1 题中的各组命题，用“或”联结起来组成新命题，并判断它们的真假.

4. 判断下列命题的真假：
(1) $\forall m\in\mathbf{R}$，$m\geqslant m$；
(2) 集合 A 是集合 $A\cap B$ 或是集合 $A\cup B$ 的子集.

5. 请写出生活和社会中的两个命题 p，q，并用联结词“$\vee$”联结成新命题，再判断其真假.

练习B

1. 用联结词“且”和“或”分别联结下面所给的命题 p，q 构成一个新命题，并判断它们的真假：
(1) p：$17<20$；　　q：$17=20$.
(2) p：平行四边形对角线互相平分；　q：平行四边形的对角线相等.

2. 判断下列关于集合 A，B 的命题的真假：
(1) 集合 A 是 $A\cap B$ 的子集且是 $A\cup B$ 的子集；
(2) $A\cap B$ 都是 $A\cup B$ 的子集.

3. 已知命题
p：李真是三好学生；　　q：李真是共青团员.
用自然语言表达下列命题：
(1) $p\wedge q$；　　(2) $p\vee q$.

1.2.2 "非"（否定）

逻辑联结词"非"(也称为"否定")的意义是由日常语言中的"不是""全盘否定""问题的反面"等抽象而来.

例如，把命题

$$\text{函数 } y=\cos x \text{ 的周期是 } 2\pi$$

加以否定，就构成了新的命题

$$\text{函数 } y=\cos x \text{ 的周期不是 } 2\pi.$$

由此可见，如果原命题是真命题，则它的否定就应该是假命题.

一般地，对命题 p 加以否定，就得到一个新的命题，记作

$$\neg p,$$

读作"非 p"或"p 的否定".

显然，$\neg p$ 与 p 不能同真或同假，其中一个为真，另一个必定为假. 它们是互为否定的，从而有

$$\neg(\neg p)=p.$$

由"非"的含义，我们可以用"非"来定义集合 A 在全集 U 中的补集：

$$\complement_U A=\{x\in U \mid \neg(x\in A)\}=\{x\in U \mid x\notin A\}.$$

注 一般把如何由 p 的真假判定 $\neg p$ 的真假总结为表Ⅲ：

表Ⅲ

p	$\neg p$
真	假
假	真

例1 写出下列各命题的否定，并判断真假：

(1) p：$y=\tan x$ 是奇函数；

(2) q：$\sqrt{(-2)^2}=-2$；

(3) r：抛物线 $y=(x-1)^2$ 的顶点是 $(1，0)$.

解：(1) $\neg p$：$y=\tan x$ 不是奇函数；(假)

(2) $\neg q$：$\sqrt{(-2)^2}\neq-2$，即

$\neg q$：$\sqrt{(-2)^2}>-2$ 或 $\sqrt{(-2)^2}<-2$；(真)

(3) $\neg r$：抛物线 $y=(x-1)^2$ 的顶点不是 $(1，0)$. (假)

下面，我们来研究如何对含有量词的全称命题和存在性命题进行否定.

先看存在性命题如何加以否定. 例如

p：有些三角形是直角三角形.

这是一个存在性命题，用符号可表示为

$$\exists x\in\{三角形\}，x 是直角三角形.$$

这个命题的否定应该是“没有一个三角形是直角三角形”，也就是说

“所有的三角形都不是直角三角形”.

这样，可用符号表示为

$$\neg p：\forall x\in\{三角形\}，x 不是直角三角形.$$

一般地，可得出结论：

> 存在性命题　　p：$\exists x\in A$，$p(x)$；
> 它的否定是　$\neg p$：$\forall x\in A$，$\neg p(x)$.

再考察全称命题如何加以否定. 例如

q：所有的质数都是奇数.

这是一个全称命题，用符号可表示为

$$\forall x\in\{质数\}，x 是奇数.$$

否定它只要能举出一个“反例”就行了. 因而它的否定就可以表述为

$$\neg q：\exists x\in\{质数\}，x 不是奇数.$$

一般地，可得出结论：

> 全称命题　　q：$\forall x\in A$，$q(x)$；
> 它的否定是　$\neg q$：$\exists x\in A$，$\neg q(x)$.

例 2　写出下列命题的非(否定)，并判断其真假：

(1) p：$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}\geqslant 0$；

(2) q：所有的正方形都是矩形；

(3) r：$\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2+2x+2\leqslant 0$；

(4) s：$\exists x\in \mathbf{R}$，$x^3+1=0$.

解：(1) $\neg p$：$\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}<0$.（假）

这是由于 $\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$ 恒成立.

(2) $\neg q$：至少存在一个正方形不是矩形.（假）

(3) $\neg r$：$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2+2x+2>0$.（真）

这是由于 $\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geqslant 1>0$ 成立.

(4) $\neg s$：$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^3+1\neq 0$.（假）

这是由于 $x=-1$ 时，$x^3+1=0$.

说明：我们已学习了三个主要的逻辑联结词：且、或、非. 这三个联结词同样可用来联结含有变量的语句. 用联结词联结含有变量的语句时，得到的新语句一般仍含有变量，它的

真假要根据语句中变量的取值来确定，例如：

(1) $x=2$ 或 $x=3$.

(2) $x+y=9$ 且 $x-y=-1$.

对于(1)，x 至少取 2，3 中的一个值时，语句表达才是真的，而 x 取其他任何值(1)都是假的.

对于(2)，只有 x 取值 4，且 y 取值 5 时，语句表达才是真的，而 x，y 取其他任何值时，语句(2)都是假的.

含有变量的语句，通常称为**开句**或**条件命题**.

练习A

1. 写出下列命题的非，并判断其真假：

(1) 2 是方程 $x^2-4=0$ 的根；　　(2) $\pi=3.141\,5$.

2. 设集合 $M=\{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. 试写出下列各命题的非，并判断其真假：

(1) $\forall n\in M$，$n<12$；　　(2) $\exists m\in\{奇数\}$，$m\in M$.

3. 写出下列各命题的非，并判断其真假：

(1) 一切分数都是有理数；　　(2) 有些三角形是锐角三角形；

(3) $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+x=x+2$；　　(4) $\forall x\in\mathbf{R}$，$2x+4\geqslant 0$.

练习B

1. 写出下列命题的非，并判断它的真假：

(1) 2 是质数；　　(2) 圆周率 π 是无理数；

(3) $3+4=7$；　　(4) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$（$\alpha$ 为任意角）；

(5) $1\,000<100$.

2. 某足球队队员的全体构成集合 A，写出下列命题的非：

(1) A 中的队员至少有一个是北京人；　　(2) A 中的队员都是北京人；

(3) A 中的队员都不是北京人；　　(4) A 中的队员不都是北京人.

3. 写出下列命题的非，并判断它们的真假：

(1) 任意实数 x，都是方程 $3x-5=0$ 的根；　　(2) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2>0$；

(3) $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2=1$；

(4) 存在一个实数 x，是方程 $x^2-3x+2=0$ 的根.

4. 举反例说明下列命题是假命题：

(1) $\forall a, b\in\mathbf{R}$，方程 $ax=b$ 都有唯一解；　　(2) $\forall x\in\mathbf{R}$，$|x|=x$.

习题 1-2 A

1. 把下列各组命题，分别用逻辑联结词“且”“或”联结成新命题，并注明它们的真假：

(1) p：2 不是奇数； q：2 是质数.

(2) p：$y=2^x$ 是单调函数； q：$y=2^x$ 是递增函数.

(3) p：$100>10$； q：$10>100$.

(4) p：数列$\{3n+2\}$是等差数列； q：数列$\{3n+2\}$是等比数列.

2. 分析下列命题的组成，并用“$\wedge$”“$\vee$”表示出来：

(1) $x+1$ 是 x^3+x^2-x-1 与 x^3+1 的公因式；

(2) 方程 $x^2=1$ 的一个解是 $x_1=1$，另一个解是 $x_2=-1$；

(3) ±1 是方程 $x^3+x^2-x-1=0$ 的根.

3. 写出下列命题的非：

(1) 正数的对数都是正数；

(2) 点$(3, 4)$不在圆 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 上；

(3) $\forall x\in\mathbf{R}$，$3x=2x+x$；

(4) $\exists x\in\mathbf{N}$，$x^2=x+2$.

4. 设集合 $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，试写出下列各命题的非：

(1) $\forall n\in M$，$n>1$； (2) $\exists n\in\{质数\}$，$n\in M$.

习题 1-2 B

1. 已知 p：$\triangle ABC$ 是直角三角形； q：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

试用自然语言表达下列命题：

(1) $\neg p$； (2) $\neg q$； (3) $p\wedge q$；

(4) $p\vee q$； (5) $\neg(p\wedge q)$； (6) $\neg(p\vee q)$.

2. 写出下列命题的非：

(1) 存在一个三角形是直角三角形；

(2) 至少有一个锐角 α，使 $\sin\alpha=0$；

(3) 在实数范围内，有一些一元二次方程无解；

(4) 不是每一个人都会开车.

1.3 充分条件、必要条件与命题的四种形式

1.3.1 推出与充分条件、必要条件

在数学和日常语言中，我们经常遇到“如果 p，则（那么）q”形式的命题，其中 p，q 分别表示研究对象所具有的性质．p 称做命题的条件，q 称做命题的结论．这种命题还有相同意义的不同说法：“只要 p，就有 q”“要是 p，便 q”等．

平面几何中学习过的大多数命题，都可以写成这样的形式，例如，

（1）如果四边形是平行四边形，则它的两组对角相等（平行四边形性质定理）；

（2）如果四边形的两组对角相等，则它就是平行四边形(平行四边形判定定理)．

在代数的学习中，我们同样遇到过这种形式的命题，例如，

（3）如果 $a>0$，则 $a^2>0$（$a\in\mathbf{R}$）；

（4）如果 $a^2>0$，则 $a>0$（$a\in\mathbf{R}$）．

这类命题的真假，要通过推理证明来断定．经过证明为真的命题，在数学学习中我们都称为定理．像上边所举的命题(1)(2)(3)都是真的，可称为定理，而命题(4)是假的．

这一节，我们专门研究“如果 p，则 q”这种形式的命题为真的情形下，p，q 的相互关系．

我们知道，当命题“如果 p，则 q”经过推理证明断定是真命题时，我们就说由 p 成立可推出 q 成立，记作

$$p\Rightarrow q,$$

读作“p 推出 q”．

如果由 p 可推出 q，我们又称

p 是 q 的**充分条件**；

或 q 是 p 的**必要条件**．

这就告诉我们，命题“如果 p，则 q”真、$p\Rightarrow q$、p 是 q 的充分条件、q 是 p 的必要条件这四种形式的表达，讲的是同一个逻辑关系，只是说法不同而已．

下面我们再举例说明．

（1）命题“如果 $x=-y$，则 $x^2=y^2$”是真命题；

$x=-y\Rightarrow x^2=y^2$；

$x=-y$ 是 $x^2=y^2$ 的充分条件；

$x^2=y^2$ 是 $x=-y$ 的必要条件．

以上不同形式的叙述，表达的都是同一个逻辑关系．

（2）命题“如果 $A\cap B\neq\varnothing$，则 $A\neq\varnothing$”是真命题；

$A\cap B\neq\varnothing\Rightarrow A\neq\varnothing$；

$A\cap B\neq\varnothing$是$A\neq\varnothing$的充分条件；

$A\neq\varnothing$是$A\cap B\neq\varnothing$的必要条件.

以上叙述，表达了同一意义的逻辑关系.

（3）平面几何中学习过的定理："在三角形中，等角对等边"，以及它的逆定理："在三角形中，等边对等角". 就是说，

命题"在$\triangle ABC$中，如果$\angle B=\angle C$，则$AC=AB$"是真命题；

在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C\Rightarrow AC=AB$；

在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$是$AC=AB$的充分条件；

在$\triangle ABC$中，$AC=AB$是$\angle B=\angle C$的必要条件.

以上叙述同样表达了意义相同的逻辑关系.

同时，我们还知道，命题"在$\triangle ABC$中，如果$AB=AC$，则$\angle B=\angle C$"也是真命题. 这就是说，$\angle B=\angle C$不仅是$AB=AC$的充分条件，也是$AB=AC$的必要条件.

一般地，如果$p\Rightarrow q$，且$q\Rightarrow p$，则称p是q的充分且必要条件，简称p是q的**充要条件**，记作

$$p\Leftrightarrow q.$$

显然，q也是p的充要条件.

p是q的充要条件，又常说成

q当且仅当p，或p与q等价.

例如，

（1）方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$有两个相等实数根的充要条件是$\Delta=b^2-4ac=0$；

（2）在$\triangle ABC$中，当且仅当$\angle C=90°$时，$AC^2+BC^2=AB^2$；

（3）$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$等价于$AB=A'B'$，且$AC=A'C'$，且$BC=B'C'$.

这些都表达了命题中条件与结论的互为充要性.

这样一来，本节开始所举平面几何中的平行四边形判定定理及性质定理，就可以合称为：四边形为平行四边形的充要条件是它的两组对角分别相等.

例1 在下列各题中，试判定p是q的什么条件.

（1）p：两三角形全等，　　q：两三角形面积相等；

（2）p：$a^2=4$，　　q：$a=2$；

（3）p：$A\subseteq B$，　　q：$A\cap B=A$.

解：（1）因为命题"如果两三角形全等，则两三角形面积相等"为真，而"如果两三角形面积相等，则两三角形全等"为假，所以p是q的充分条件，但不是必要条件；

（2）因为命题"如果$a^2=4$，则$a=2$"为假，而"如果$a=2$，则$a^2=4$"为真，所以p是q的必要条件，但不是充分条件；

（3）因为命题"如果$A\subseteq B$，则$A\cap B=A$"为真，并且"如果$A\cap B=A$，则$A\subseteq B$"也为真，所以p是q的充要条件.

综观上例，对于命题"如果p，则q"可以归纳出：

（1）如果$p\Rightarrow q$，则p就是q的充分条件；

（2）如果 $q\Rightarrow p$，则 p 就是 q 的必要条件；

（3）如果 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，则 p 就是 q 的充要条件.

例 2　设 $A=\{x\mid p(x)\}$，$B=\{x\mid q(x)\}$ 且 $A\subseteq B$（图 1-3）．在下列各命题中，试确定 r 是 s 的什么条件，s 是 r 的什么条件.

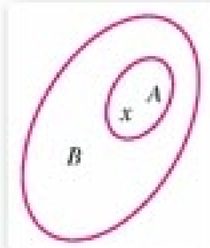


图 1-3

（1）r：$x\in A$，s：x 具有性质 $p(x)$；

（2）r：$x\in A$，s：$x\in B$；

（3）r：$A\subseteq B$，s：$x\in A\Rightarrow x\in B$.

解：（1）由集合特征性质的定义可知：

命题：$x\in A$，与命题：x 具有性质 $p(x)$，可互相推出.

因此，r 是 s 的充要条件；s 也是 r 的充要条件.

（2）因为 $A\subseteq B$，所以，如果 $x\in A$，则 $x\in B$ 为真.

因此，r 是 s 的充分条件；s 是 r 的必要条件.

（3）命题：$A\subseteq B$ 与命题：$x\in A\Rightarrow x\in B$，可互相推出.

因此，r 是 s 的充要条件；s 也是 r 的充要条件.

练习A

1. 判断下列命题的真假，对真命题用符号“$\Rightarrow$”或“$\Leftrightarrow$”表示出来：

（1）平行四边形的一组对边相等；

（2）奇数是当且仅当被 2 除余 1 的整数；

（3）设 x，y 为实数，如果 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=0$，则 $x=y=0$；

（4）若 a，b，c 成等差数列，则 $2b=a+c$.

2. 分别用充分条件、必要条件或充要条件叙述下列真命题：

（1）设 x，y 为实数，如果 $x^2+y^2=0$，则 $x=0$，且 $y=0$；

（2）如果四边形的一组对边平行且相等，则这个四边形是平行四边形；

（3）如果两个三角形相似，则它们的对应角相等；

（4）如果 $\angle A=30^\circ$，则 $\sin A=\dfrac{1}{2}$.

3. 用充分条件、必要条件或充要条件填空：

（1）x 是自然数是 x 是整数的________；

（2）x 是有理数是 x 是实数的________；

（3）x 是实数是 x 是有理数的________；

（4）$x>3$ 是 $x>5$ 的________；

（5）$x=3$ 是 $x^2-2x-3=0$ 的________；

（6）$x>5$ 是 $x>3$ 的________；

(7) $x^2-4=0$ 是 $x+2=0$ 的________；

(8) 两个三角形的三边对应相等，是两个三角形全等的________；

(9) $a=0$ 是 $ab=0$ 的________；

(10) $ab=0$ 是 $a=0$ 的________.

练习B

1. 用充分条件、必要条件或充要条件填空：

(1) $A=\varnothing$是 $A\cup B=B$ 的________；

(2) $A\subsetneqq B$ 是 $A\cap B=A$ 的________；

(3) $x\in A$ 是 $x\in A\cap B$ 的________；

(4) $x\in A$ 且 $A\subsetneqq B$ 是 $x\in A$ 且 $x\in B$ 的________.

2. 判断下列命题是不是真命题：

(1) $a=b$ 是 $|a|=|b|$ 的必要条件；

(2) $a=b$ 是 $|a|=|b|$ 的充分条件；

(3) $x-2=0$ 是 $x^2-4=0$ 的必要条件；

(4) $x+2=0$ 是 $x^2-4=0$ 的充要条件；

(5) $a>b$ 是 $a^2>b^2$ 的充分条件；

(6) $a>b$ 是 $|a|>|b|$ 的必要条件；

(7) 今天是星期一是明天是星期二的充要条件；

(8) 两个三角形的两组对应角分别相等是两个三角形相似的充要条件.

1.3.2 命题的四种形式

在初中学习平面几何时，当已证明一个命题是正确时，常常还要讨论它的逆命题是否正确. 例如，“如果一个三角形是等腰三角形，则这个三角形两底角相等”，它的逆命题是“如果一个三角形的两个内角相等，那么这个三角形是等腰三角形”. 我们知道这个命题也是正确的. 有时我们还会问：

如果一个三角形不是等腰三角形，这个三角形会不会有两个内角相等?

如果一个三角形没有两个内角相等，这个三角形会不会是等腰三角形?

类似上述的提问，促使我们对“如果 p，则 q”这种形式的命题中的逻辑关系再作深入的探讨.

命题“如果 p，则 q”是由条件 p 及结论 q 组成的，对 p，q 进行“换位”或“换质”后，一共可构成四种不同形式的命题.

（1）**原命题**：如果 p，则 q；

（2）条件和结论“换位”得

$$\text{如果 } q\text{，则 } p\text{，}$$

这称为原命题的**逆命题**；

（3）条件和结论“换质”（分别否定）得

$$\text{如果 } \neg p\text{，则 } \neg q\text{，}$$

这称为原命题的**否命题**；

（4）条件和结论“换位”又“换质”得

$$\text{如果 } \neg q\text{，则 } \neg p\text{，}$$

这称为原命题的**逆否命题**.

由上面可看出：原命题和逆命题是互逆的命题. 同样，否命题和逆否命题也是互逆命题.

原命题和否命题、逆命题和逆否命题分别是互否的命题.

原命题和逆否命题，逆命题和否命题分别都是互为逆否的命题(图 1-4).

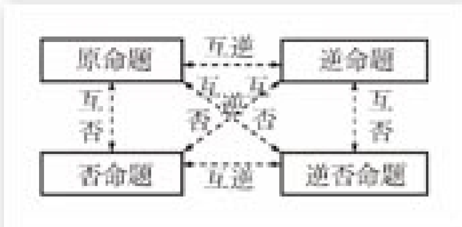


图 1-4

例 1　试写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题，并注明其真假：

（1）$\forall x, y\in\mathbf{R}$，如果 $xy=0$，则 $x=0$；

（2）设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为向量，如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

解：（1）原命题为：$\forall x, y\in\mathbf{R}$，如果 $xy=0$，则 $x=0$；（假）

逆命题为：$\forall x, y\in\mathbf{R}$，如果 $x=0$，则 $xy=0$；（真）

否命题为：$\forall x, y\in\mathbf{R}$，如果 $xy\neq0$，则 $x\neq0$；（真）

逆否命题为：$\forall x, y\in\mathbf{R}$，如果 $x\neq0$，则 $xy\neq0$.（假）

（2）原命题为：如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；（真）

逆命题为：如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；（真）

否命题为：如果 $\boldsymbol{a}$ 不垂直于 $\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq0$；（真）

逆否命题为：如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq0$，则 $\boldsymbol{a}$ 不垂直于 $\boldsymbol{b}$.（真）

例 2　写出命题“平行四边形的对角线互相平分”的逆命题、否命题、逆否命题，并指出其真假.

解：原命题：平行四边形的对角线互相平分；（真）（性质定理）

逆命题：对角线互相平分的四边形是平行四边形；（真）（判定定理）

否命题：非平行四边形的对角线不互相平分；（真）

逆否命题：对角线不互相平分的四边形不是平行四边形.（真）

由以上例题可以发现：原命题与它的逆命题、原命题与它的否命题之间的真假是不定的，而原命题与它的逆否命题(它的逆命题与它的否命题)之间在真假值上是始终保持一致

的：同真或同假.

一般来说，命题“如果 p，则 q”的四种形式之间有如下关系：

（1）互为逆否的两个命题是等效的(同真同假)．因此，证明原命题也可以改证它的逆否命题.

（2）互逆或互否的两个命题是不等效的.

练习A

写出下列各命题的逆命题、否命题和逆否命题，并判定其真假：

（1）$\forall n\in\mathbf{N}$，如果 n 是完全平方数，则 $\sqrt{n}\in\mathbf{N}$.

（2）$\forall a$，$b\in\mathbf{R}$，如果 $a=b$，则 $a^2=ab$.

（3）$\forall x$，$q\in\mathbf{R}$，如果 $q>0$，则 $x^2+x-q=0$ 有实数根.

（4）$\forall x$，$y\in\mathbf{R}$，如果 $xy=0$，则 $x=0$ 或 $y=0$.

（5）如果四边形是菱形，则它的对角线互相垂直.

练习B

写出下列各命题的逆命题、否命题和逆否命题，并判定其真假：

（1）如果四边形是平行四边形，则它的一组对边平行且相等.

（2）设 $x\in\mathbf{R}$，如果 $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{CD}$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线.

（3）如果一个函数是偶函数，则它的图象关于 y 轴成轴对称图形.

（4）如果一个函数是奇函数，则它的图象关于坐标原点成中心对称图形.

（5）四边形为平行四边形的必要条件是一组对边平行.

习题1-3 A

1. 用充分条件、必要条件两种方式表达下列各组 p，q 的关系：

（1）p：a 能被 3 整除，q：a 能被 6 整除；

（2）p：$x^3=y^3(x，y\in\mathbf{R})$，$q$：$x=y(x，y\in\mathbf{R})$；

（3）p：两条对角线相等的四边形，q：等腰梯形；

（4）p：m，n 均为偶数，q：mn 为偶数.

2. 改用充分条件、必要条件叙述下列真命题：

(1) 如果 $ab\neq0$，则 $a\neq0$；

(2) 如果 $(x+1)(y-2)=0$，则 $x=-1$ 或 $y=2$；

(3) 如果四边形 $ABCD$ 是菱形，则 $AB=BC=CD=AD$；

(4) 如果 $\alpha=45°$，则 $\tan\alpha=1$；

(5) 如果集合 $A=\varnothing$，则集合 $A\cup B=B$；

(6) 如果 $(x\in A)\wedge(x\in B)$，则 $x\in(A\cap B)$.

3. 判断下列表达是否正确. 如果不正确，请改正过来：

(1) “n 是自然数”是“n 是整数”的必要条件；

(2) “x 是实数”是“x 是有理数”的充分条件；

(3) “$x^2>9$”是“$x>3$”的充分条件但不是必要条件；

(4) “m，n 都是奇数”的充要条件是“$m+n$ 是偶数”；

(5) “$a>b$”是“$a^2>b^2$”的充分条件；

(6) “$a>b$”是“$|a|>|b|$”的必要条件；

(7) “四边形的对角互补”是“四边形的四个顶点共圆”的充要条件；

(8) “$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$”是“$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$”的充要条件.

4. 写出下列各命题的否命题、逆命题和逆否命题，并判断其真假：

(1) 如果 $b^2-4ac>0$，则方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两个不相等的实根；

(2) 如果 $x-y=0$，则 $(x-y)(x+y)=0$.

5. 写出下列各命题的逆命题、否命题和逆否命题：

(1) 如果 $x=3$ 或 $x=7$，则 $(x-3)(x-7)=0$；

(2) 如果四边形是正方形，则这个四边形是矩形，又是菱形；

(3) 如果 a，b 都是奇数，则 ab 必是奇数；

(4) 如果四边形内接于圆，则这个四边形的两对角之和等于 180°.

习题 1-3 B

1. 用“充分”“必要”“充要”填空：

(1) 集合 $A=\varnothing$ 是 $A\cap B=\varnothing$ 的________条件；

(2) $A\cap B=A$ 是 $A\subseteq B$ 的________条件；

(3) $x\in A\cap B$ 是 $x\in A$ 且 $x\in B$ 的________条件；

(4) $x\in A\cup B$ 是 $x\in A$ 或 $x\in B$ 的________条件.

2. 在下列各题中，p 是 q 的什么条件？

(1) p：$(a>0)\wedge(b>0)$，　　q：$ab>0$；

(2) p：$(x=1)\vee(x=-3)$，　　q：$x^2+2x-3=0$；

(3) p：$a^2-b^2=0$，　　q：$a=b$；

(4) p：四边形 $ABCD$ 是正方形，　　q：$AC\perp BD$.

3. 用充分条件、必要条件、充要条件改写下列命题的陈述：

(1) 设集合 $A=\{x \mid p\}$，$B=\{x \mid q\}$，如果 $A\subseteq B$，则 $p \Rightarrow q$；

(2) 如果四边形是菱形，则它的四边相等；

(3) 如果圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 过原点，则 $a^2+b^2=r^2$；

(4) $\forall x$，$y\in \mathbf{N}$，如果 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=0$，则 $(x=0)\wedge(y=0)$.

4. 判断下列命题的真假：

(1) $a>0$ 是 $a^2>0$ 的充要条件；

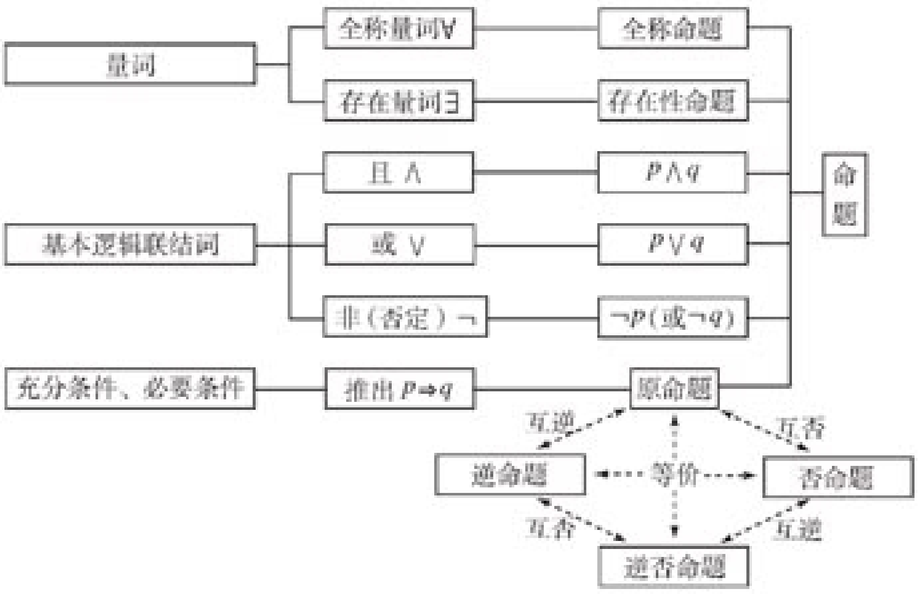
(2) $\triangle ABC$ 中，当且仅当 $a^2+b^2=c^2$ 时 $\angle C=90°$；

(3) 方程 $ax+b=0$，当且仅当 $a\neq 0$ 时有唯一解；

(4) $A\cup B=B$ 的充要条件是 $A\subseteq B$.

本章小结

Ⅰ 知识结构



Ⅱ 思考与交流

1. 举例说明什么叫做命题？
2. 举例说明什么是全称量词？什么叫做全称命题？
3. 举例说明什么是存在量词？什么叫做存在性命题？
4. 试用符号表达一个全称命题和一个存在性命题，并判定它们各自的真假.
5. 试分别说明逻辑联结词“且”“或”“非”的意义和符号.
6. 对于推出关系 $p\Rightarrow q$，说明什么是充分条件，必要条件和充要条件？
7. 对于命题“如果 p，则 q”，试说明什么是它的逆命题、否命题、逆否命题？它们之间有什么逻辑关系？
8. 举例说明什么是命题的否定？它与否命题有什么不同？

Ⅲ 巩固与提高

1. 判断下列命题的真假：

(1) x 是 A 的元素，记作 $x\in A$； (　　)

(2) $3\in\{1, 5, 3, 7\}$； (　　)

(3) $\{a\}\in\{a, b, c, d\}$； (　　)

(4) $\{a, b, c\}\subseteq\{a, b, c\}$； (　　)

(5) $\varnothing=\{0\}$； (　　)

(6) $\varnothing\subsetneqq\{0\}$； (　　)

(7) $\{1, 2\}$ 的所有子集是 $\{1\}$，$\{2\}$，$\{1, 2\}$； (　　)

(8) $\{a, b, c, d\}=\{b, a, d, c\}$； (　　)

(9) $\{x \mid x^2-5x+6=0\}=\{2, 3\}$； (　　)

(10) $A\cup B=\{x \mid x\in A$，且 $x\in B\}$； (　　)

(11) $A\cap B=\{x \mid x\in A$，或 $x\in B\}$； (　　)

(12) $A\cap B\subseteq A$，且 $A\cap B\subseteq B$； (　　)

(13) 如果 $A\cup B=A$，则 $B\subseteq A$； (　　)

(14) $A\cap B=B\cap A$，且 $A\cup B=B\cup A$； (　　)

(15) 如果 $x^2-3x+2=0$，则 $x=2$，且 $x=1$； (　　)

(16) $2+2=4$，且 $3+2=6$； (　　)

(17) $3+6=9$，或 $3+6=8$； (　　)

(18) 如果 $x<2$，则 $x<3$； (　　)

(19) $x=3$ 是 $x^2+2x-15=0$ 的充要条件； (　　)

(20) $x, y, z\in\mathbf{R}$，$x=0$，且 $y=0$，且 $z=0$ 是 $x^2+y^2+z^2=0$ 的充要条件. (　　)

2. 写出下列命题的非：

(1) 北京大学的所有学生都是中国公民；

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2>-1$；

(3) $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+1=0$.

3. 在下列命题中，哪些具有“推出”关系？

(1) 如果两条直线平行，那么内错角相等；

(2) 如果 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，那么 $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$；

(3) 设 α，β 是锐角．如果 $\alpha+\beta=90^\circ$，那么 $\sin\alpha=\cos\beta$；

(4) 如果一个数 x 能被 3 整除，那么数 $x+3$ 也能被 3 整除.

4. 举反例说明下列命题是假的：

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x>0$；

(2) 如果 $x<2$，则 $x<1$.

5. 用逻辑符号 $\wedge$、$\vee$、$\neg$、$\Rightarrow$、$\Leftrightarrow$ 和量词符号 $\forall$、$\exists$ 把下列命题表示出来：

(1) $x=1$ 或 $x=3$ 是 $x^2-4x+3=0$ 的充要条件；

(2) $x=5$ 是 $x^2=25$ 的充分条件；

(3) $x\in A\cap B$ 当且仅当 $x\in A$ 且 $x\in B$；

(4) $x\in \mathbf{Z}$ 或 $x\in \mathbf{Q}$ 是 $x\in \mathbf{R}$ 的充分条件；

(5) 有一个正整数，既是质数，又是偶数；

(6) 任一个整数，或者是奇数或者是偶数；

(7) 没有一个整数 a，使 $a^2+1=0$ 成立；

(8) 如果两个集合 A，B 至少有一个公共元素，则它们的交集不空.

6. 设 a，b，$c\in \mathbf{R}$，求证：$ac<0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个正根和一个负根的充要条件.

IV 自测与评估

1. 判断下列语句中，哪些是命题：

(1) $7>2$；　　(2) 0 是最小的自然数；

(3) $\sqrt{2}$是无理数吗？　　(4) $\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2\geqslant 0$；

(5) 每个向量都有方向；　　(6) $x+2=0$.

2. 判断下列命题的真假：

(1) $5\geqslant 5$；

(2) 菱形的对角线垂直且互相平分；

(3) $\varnothing\subseteq\{0\}$或$\{1\}\in\{1,\ 2\}$；

(4) $\varnothing\subseteq\{0\}$且$\{1\}\in\{1,\ 2\}$；

(5) $\{1\}\notin\{1,\ 2\}$.

3. 设命题 p：π 是无理数，q：$\sqrt{5}$不是有理数，试写出命题 $p\wedge q$，$p\vee q$ 和 $\neg p$，并判断这些命题的真假.

4. 写出命题："如果 $a^2+2ab+b^2+a+b-2\neq 0$，则$a+b\neq 1$"的逆命题、否命题、逆否命题，并判断它们的真假.

5. 指出下列各组命题中，p 是q 的什么条件，q 又是 p 的什么条件：

(1) p：$x=y$，　　q：$x^2=y^2$；

(2) p：$x^2+y^2=0$，　　q：$xy=0$；

(3) p：$\alpha+\beta=0$，　　q：$\sin(\alpha+\beta)=0$.

6. 如果一元二次方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负的实数根，试确定这个结论成立的充要条件.

7. 证明：方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 有一个根为-1 的充要条件是 $a+c=b+d$.

8. 写出下列命题的非，并判断真假：

(1) 正方形都是菱形；

(2) $\exists x \in \mathbf{R}$，$4x-3>x$；

(3) $\forall x \in \mathbf{R}$，$x+1=2x$.

9. 举反例说明下列各命题是假的：

(1) $\forall a \in \mathbf{R}$，函数 $y=a^x$ 是单调函数；

(2) $\forall x \in \mathbf{R}$，$x^2+2x-3 \geqslant 0$.

10. 举例说明下列各命题的正确性：

(1) $\exists x \in \mathbf{R}$，$x^2+2x-3=0$；

(2) $\exists x \in \{四边形\}$，使 $x \in \{菱形\}$ 且 $x \in \{矩形\}$.

数 学 文 化

阅读与欣赏

什么是数理逻辑

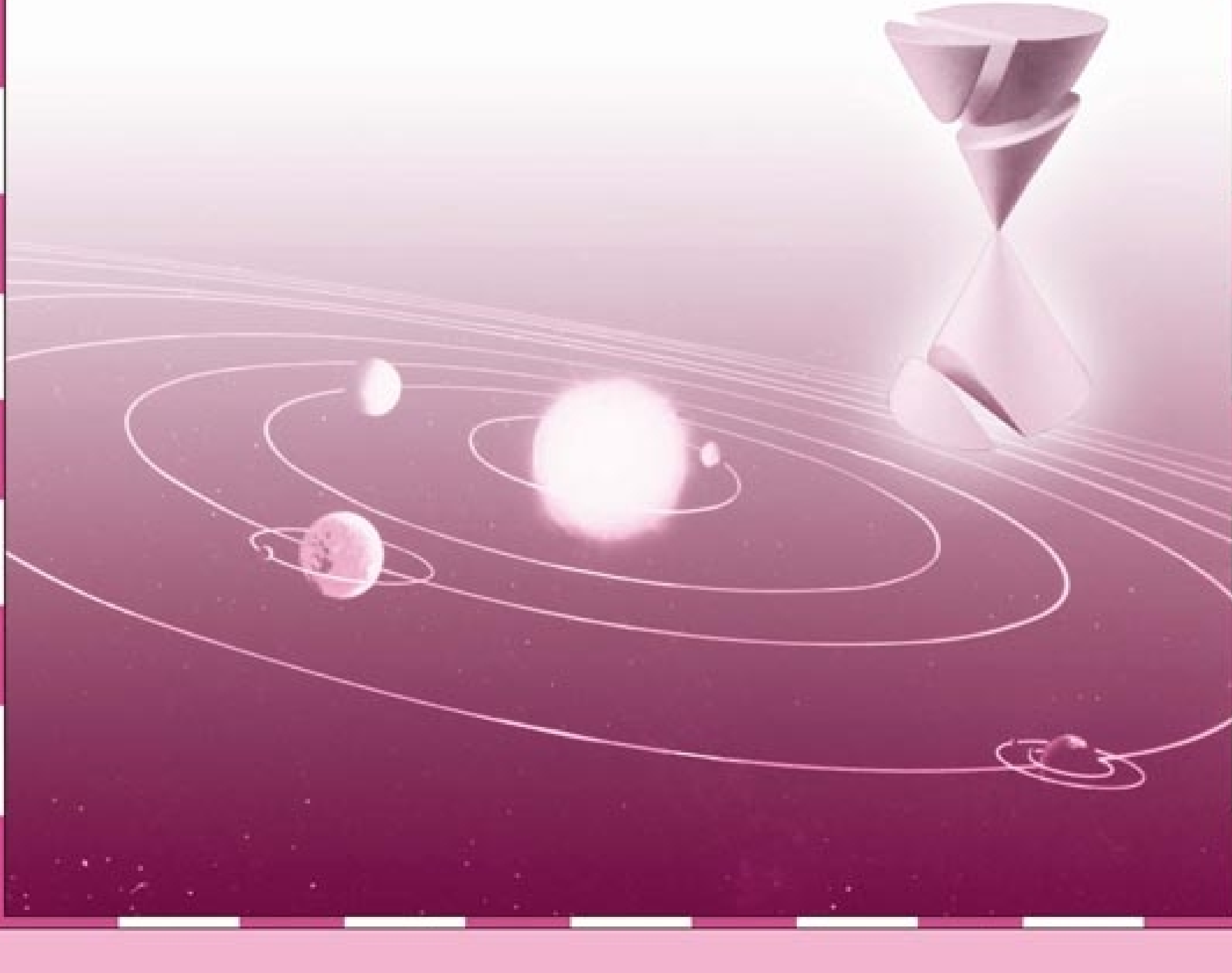
数理逻辑是用数学方法研究推理过程的科学．所谓数学方法就是用一套表意符号（即有确定意义的人工符号语言）表达思维规律与逻辑结构的方法．

三百多年前，德国数学家莱布尼兹就想发明一种语言符号用作推理，他认为逻辑语言就是用一些表意符号去分别代表一些简单的概念，然后用符号的各种不同组合来表达思维．继莱布尼兹后对数理逻辑做出重大贡献的是英国数学家布尔，他指出逻辑学应像代数那样，能够借助一些有确定意义的符号按照一定的运算法则进行演算，从而把思维规律的研究转化为符号运算规律的研究．布尔成功地定义了“逻辑加法”和“逻辑乘法”．例如，在本章中给定了两个命题，就可用联结词“或、且”分别构造出新的命题．用“或”联结两个命题通常就叫做“逻辑加”，用“且”联结两个命题通常叫做“逻辑乘”，并且容易验证这些“逻辑加法”和“逻辑乘法”满足交换律、结合律和分配律，这样就把逻辑中语言推理转化为代数运算．应用数学方法研究逻辑，使数学的应用大大地扩大，所谓“数学在生物学和社会学中的应用等于零”的说法就完全不成立了．现代数理逻辑在数学、计算机科学、自动化控制、哲学、语言学、经济学等科学中有着广泛的应用．

同学们学点数理逻辑知识是完全必要的．它有助于提高我们的逻辑思维能力，为我们今后能正确使用数学语言打下基础．应当指出，近代数学语言已有了显著的变化，集合和数理逻辑语言已成了数学表述的通用语言．十多年来，数理逻辑在我国大学、中学已逐步普及．如果你不懂得一点数理逻辑知识，你就很难读懂数学书了．

现代数理逻辑的发展异常迅速，已取得了许多重大成果．数理逻辑基础知识一般包括：集合代数、命题代数和谓词演算等部分．

第二章 圆锥曲线与方程

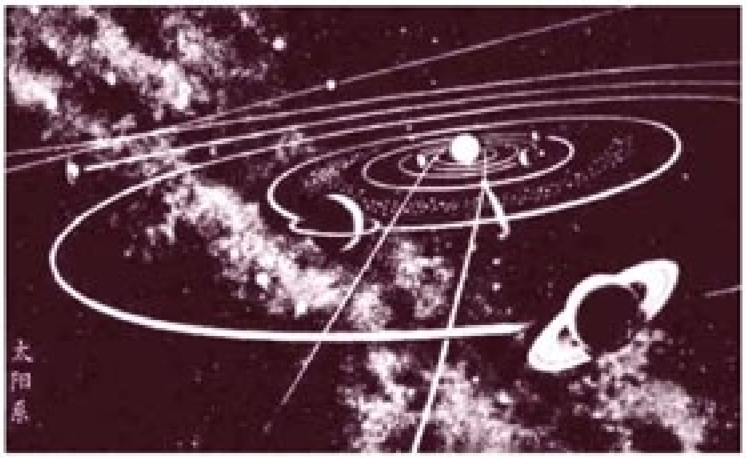


2003 年 12 月 30 日凌晨，“探测一号”赤道星从我国某卫星发射基地升空，准确进入预定轨道环绕地球运行，揭开了我国实施“地球空间双星探测计划”的序幕。你知道“探测一号”星运行的轨道是什么图形吗？

天文学家通过对星象的观察和研究，发现太空中那些行星和彗星，其运行的轨道有椭圆，也有双曲线；物理学家将理论与实践相结合，证实了物体斜抛运行的轨道是抛物线。椭圆、双曲线、抛物线，统称为圆锥曲线。这是因为这些曲线都可以由平面与圆锥面相截而得到，但它们并非只是依附于圆锥面的静态曲线，而是现实世界中物体运动的普遍形式。

圆锥曲线在数学和其他科学技术领域中占有重要的地位，在生产和生活实际中有着大量的应用。如人类为探索宇宙奥秘、建立通讯、观测气象等，向太空发射过各种人造地球卫星，它们运行的轨道都是椭圆；又如电影放映机的装置、汽车车灯反光镜的设计、通风塔的造型等，都用到了有关圆锥曲线的知识。

圆锥曲线的形态多种多样，如何数学地描述它们的共同特征，正确地认识它们的基本性质，并用于解决一些实际问题，这是本章研究的中心课题。在数学 2 的《平面解析几何初步》中，我们学会了用“坐标法”研究直线和圆。本章对圆锥曲线的研究，也是采用“坐标法”。通过本章的学习，大家对曲线与方程的关系将有更深刻的认识，对数形结合的思想和用代数方法研究几何问题的过程会有进一步的体会。



2.1 椭 圆

2.1.1 椭圆及其标准方程

在圆柱形玻璃杯中盛半杯水，当杯体直立时，水面的边界是一个圆；当杯体倾斜一个角度时(水面与杯壁四周都相交)，水面的边界会变成另一种曲线．这一曲线，就是椭圆的直观形象．换一种说法，如果用一个与圆柱轴线斜交的平面截这个圆柱，那么平面与这个圆柱侧面的交线是椭圆，如图 2-1 所示．但椭圆是什么样的点的轨迹呢？

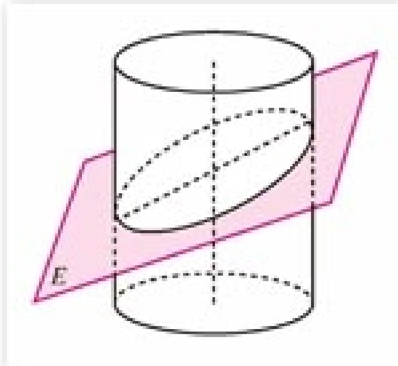


图 2-1

我们已经知道，平面内到一个定点的距离等于定长的点的轨迹(或集合)是圆．那么平面内到两个定点的距离之和等于定长的点的轨迹又是什么呢？

我们不妨实际操作一下，通过具体实践探讨其结果．

在画板上取两个定点 F_1 和 F_2，把一条长度为定值且大于 $|F_1F_2|$ 的细绳的两端固定在 F_1，F_2 两点(图 2-2)．用铅笔尖把细绳拉紧，并使笔尖在画板上慢慢移动一周，画出的图形是一个椭圆．

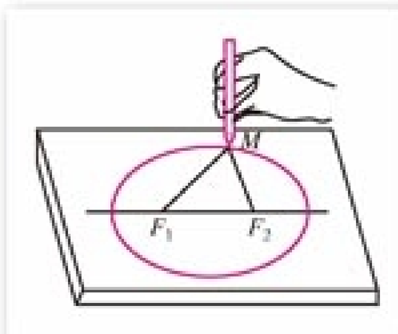


图 2-2

在上述直观认识的基础上，我们归纳出椭圆的定义如下：

平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离之和等于定长(大于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做**椭圆**．这两个定点 F_1，F_2 叫做**椭圆的焦点**，两焦点的距离 $|F_1F_2|$ 叫做**椭圆的焦距**．

思考与讨论

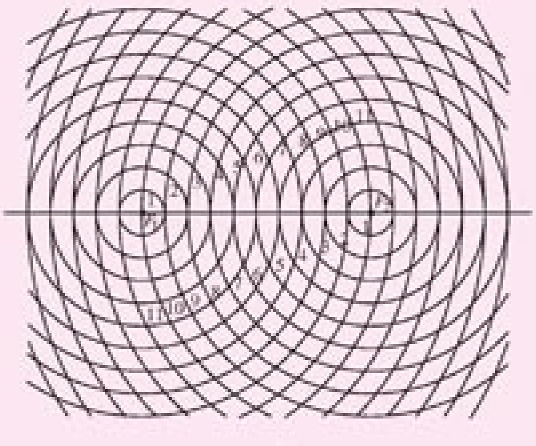
在椭圆的定义中，指明“距离之和”等于定长且大于 $|F_1F_2|$．设这个定长为 $2a$，且限定了 $2a>|F_1F_2|$．如果 $0<2a\leqslant|F_1F_2|$，那么平面内到定点 F_1，F_2 的距离之和等于 $2a$ 的点的轨迹如何？

练习A

1. 如图，已知 $|F_1F_2|=10$，图中的一系列圆是圆心分别为 F_1，F_2 的两组同心圆，每组同心圆的半径依次为 1，2，3，…，按“加 1”依次递增．试按照下列步骤，利用这两组同心圆画一个椭圆：

(1) 在两组同心圆的交点中描出“与 F_1，F_2 两点的距离的和等于 12”的交点；

(2) 用光滑的曲线顺次连结所描出的交点，则所得图形是以 F_1，F_2 为焦点的椭圆．



(第 1 题)

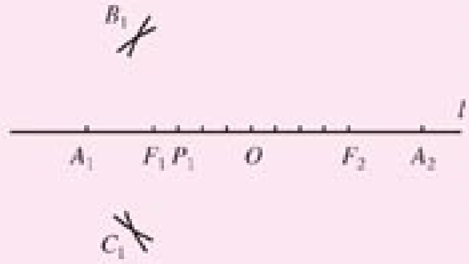
2. 参照上题，如果要画一个焦距为 8 的椭圆，使这个椭圆上的任意一点与 F_1，F_2 两焦点的距离之和等于 10，可以怎样设计两组同心圆和进行描点？

练习B

1. 如图，已知点 F_1，F_2，A_1，A_2 在直线 l 上，点 O 是线段 F_1F_2 和线段 A_1A_2 的公共的中点，$|F_1F_2|=2c$，$|A_1A_2|=2a$．

(1) 把线段 F_1F_2 分为 n 等分，分点为 P_1，P_2，P_3，…，P_{n-1}；

(2) 取点 P_1，分别以 F_1，F_2 为圆心，$|A_1P_1|$，$|A_2P_1|$ 为半径画弧，得交点 B_1，C_1．这时 $|B_1F_1|+|B_1F_2|$，$|C_1F_1|+|C_1F_2|$ 的值是多少？



(第 1 题)

(3) 对于点 P_2，P_3，…，P_{n-1} 用同 (2) 的画法作出一系列的点 B_2，C_2，B_3，C_3，…，再把 A_1，B_1，B_2，B_3，…，A_2 及 A_1，C_1，C_2，C_3，…，A_2 用光滑的曲线顺次连结起来，所得到的图形是椭圆吗？为什么？

2. 已知 B，C 是两个定点，$|BC|=6$. 以线段 BC 为一边画三角形，试问满足条件"$\triangle ABC$ 的周长等于 20"的顶点 A 的轨迹是什么样的图形？为什么？

我们已经知道，在直角坐标平面上直线和圆都有相应的方程，从而就可以用代数方法来研究它们的几何性质、位置关系等. 那么，如何建立直角坐标系？椭圆的方程又是什么呢？

已知椭圆的焦点为 F_1，F_2，$|F_1F_2|=2c$；椭圆上任意一点到焦点 F_1，F_2 的距离的和等于常数 $2a$，其中$a>c>0$.

以过焦点 F_1，F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系 xOy，如图 2-3 所示. 这时，F_1 和 F_2 的坐标分别为$(-c,\ 0)$，$(c,\ 0)$.

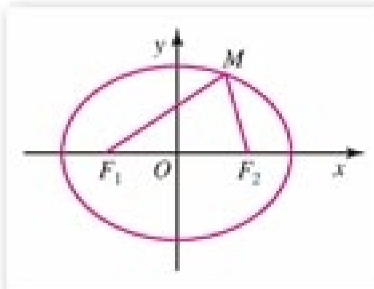


图 2-3

设 $M(x,\ y)$是椭圆上的任意一点，根据椭圆的定义可知，点 M 在椭圆上的条件是

$$|MF_1|+|MF_2|=2a.$$

因为$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，$|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，

所以
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a, \qquad ①$$

把①式移项，得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

两边平方，得

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

整理后，得

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

两边再平方，得

$$(a^2-cx)^2=a^2[(x-c)^2+y^2],$$

整理后，得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \qquad ②$$

因为 $a>c>0$，所以 $a^2-c^2>0$.

设 $a^2-c^2=b^2$，$b>0$，则②式化为

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).} \qquad ③$$

由上述推导过程可知，椭圆上任意一点 M 的坐标(x, y)适合方程③；反之，如果点 M 的坐标(x, y)适合③，也可以证明$|MF_1|+|MF_2|=2a$ 成立（证明略），即点 M 在这个椭圆上．所以方程③正是表达了椭圆的特征性质，叫做**椭圆的标准方程**．它所表示的椭圆，两个焦点在 x 轴上，坐标分别为$F_1(-c,0)$，$F_2(c, 0)$，这里$c^2=a^2-b^2$．

探索与研究

如果所建立的直角坐标系是以过焦点 F_1，F_2 的直线为 y 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 x 轴（图 2-4），设焦点分别为 $F_1(0, -c)$，$F_2(0, c)$，a，b 的意义同前，那么所得的椭圆的方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0),$$

这是焦点在 y 轴上的椭圆的标准方程．

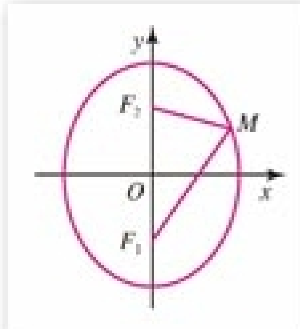


图 2-4

例 1　根据下列条件，求椭圆的标准方程：

(1) 两个焦点的坐标分别是$(-3, 0)$，$(3, 0)$，椭圆上一点 P 与两焦点的距离的和等于 8；

(2) 两个焦点的坐标分别为$(0, -4)$，$(0, 4)$，并且椭圆经过点$(\sqrt{3}, -\sqrt{5})$．

解：(1) 椭圆的焦点在 x 轴上，可设它的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

由已知，得 $a=4$，$c=3$，故 $b^2=a^2-c^2=4^2-3^2=7$．

因此，所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1.$$

(2) 椭圆的焦点在 y 轴上，可设它的标准方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

由已知，得 $c=4$，又 $c^2=a^2-b^2$，故 $a^2=b^2+16$．　　①

因为点$(\sqrt{3}, -\sqrt{5})$在椭圆上，所以

$$\frac{(-\sqrt{5})^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{3})^2}{b^2}=1,\ 即\ \frac{5}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1. \quad ②$$

将①式代入②，得

$$\frac{5}{b^2+16}+\frac{3}{b^2}=1,$$

解得 $b^2=4$，$b^2=-12$(舍去).

由①，得 $a^2=4+16=20$.

因此，所求椭圆的标准方程为

$$\frac{y^2}{20}+\frac{x^2}{4}=1.$$

说明：本例用待定系数法求出了椭圆的标准方程．要注意焦点在 x 轴上的椭圆与焦点在 y 轴上的椭圆，其标准方程形式是不同的．

例 2 求下列方程表示的椭圆的焦点坐标：

(1) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{24}=1$；　　(2) $8x^2+3y^2=24$.

解：(1) 已知方程是椭圆的标准方程，由 $36>24$，可知这个椭圆的焦点在 x 轴上，且 $a^2=36$，$b^2=24$．所以

$$c^2=a^2-b^2=36-24=12,\ c=2\sqrt{3}.$$

因此，椭圆的焦点坐标为$(-2\sqrt{3},\ 0)$，$(2\sqrt{3},\ 0)$.

(2) 把已知椭圆的方程化为标准方程

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{8}=1.$$

由 $8>3$，可知这个椭圆的焦点在 y 轴上，且 $a^2=8$，$b^2=3$．所以

$$c^2=a^2-b^2=8-3=5,\ c=\sqrt{5}.$$

因此，椭圆的焦点坐标为$(0,\ -\sqrt{5})$，$(0,\ \sqrt{5})$.

练习A

1. 根据下列条件，求椭圆的标准方程：

(1) $a=\sqrt{3}$，$b=1$，焦点在 x 轴上；

(2) $b=3$，经过点$(0,\ -4)$，焦点在 y 轴上；

(3) 焦点坐标为$(-5,\ 0)$和$(5,\ 0)$，椭圆上一点与两焦点的距离的和是 26；

(4) $a=5$，$c=\sqrt{17}$，焦点在 y 轴上；

(5) 焦点坐标为$(0,\ -2\sqrt{3})$和$(0,\ 2\sqrt{3})$，且经过点$(-\sqrt{6},\ \sqrt{5})$.

2. 设 M 是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上一点，F_1，F_2 是椭圆的焦点．如果点 M 与焦点 F_1 的距离为 4，那么点 M 与焦点 F_2 的距离是多少？

3. 求下列方程表示的椭圆的焦点坐标：

(1) $\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{12}=1$；　　(2) $2x^2+4y^2=1$；

(3) $25x^2+16y^2=144$；　　(4) $\frac{4x^2}{25}+\frac{9y^2}{25}=1$.

练习B

1. 已知椭圆的两个焦点分别为 $F_1(-4,0)$ 和 $F_2(4,0)$，再添加什么条件，可得这个椭圆的方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$？
2. 已知两点 $B(6,0)$ 和 $C(-6,0)$，设点 A 与 B，C 的连线 AB，AC 的斜率分别为 k_1，k_2. 如果 $k_1\cdot k_2=-\frac{4}{9}$，求点 A 所在曲线的方程，并说明它是何种曲线？

2.1.2 椭圆的几何性质

已知椭圆 C 的标准方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0), \quad ①$$

我们利用方程①来研究椭圆的一些几何性质.

1. 范围

由方程①可得，椭圆 C 上任意一点的坐标 (x,y) 都适合不等式

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\ \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,$$

即
$$-a\leqslant x\leqslant a,\ -b\leqslant y\leqslant b.$$

所以，椭圆 C 位于直线 $x=\pm a$ 和 $y=\pm b$ 围成的矩形内(如图 2-5).

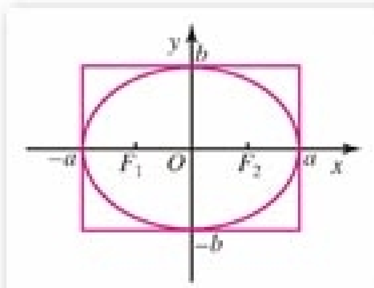


图 2-5

2. 对称性

在方程①中，把 x 换成 $-x$，这个方程不变. 可知如果 $M_1(x,y)$ 是椭圆 C 上任一点，则与点 M_1 关于 y 轴对称的点 $M_2(-x,y)$ 也在椭圆 C 上，即这个椭圆关于 y 轴对称. 同样地，把 y 换成 $-y$，或把 x 和 y 同时相应换成 $-x$ 和 $-y$，方程①都不变，可知这个椭圆关于 x 轴对称，又关于坐标原点对称.

所以，椭圆 C 既是分别以 y 轴、x 轴为对称轴的轴对称图形，又是以坐标原点为对称中心的中心对称图形. 椭圆的对称中心叫做**椭圆的中心**.

3. 顶点

在方程①中，令 $y=0$，得 $x=\pm a$，可知椭圆 C 与 x 轴有两个交点，分别是 $A_1(-a,\ 0)$和 $A_2(a,\ 0)$；若令 $x=0$，则得 $y=\pm b$，可知椭圆 C 与 y 轴也有两个交点，分别是$B_1(0,\ -b)$和 $B_2(0,\ b)$.

所以，椭圆 C 与它的对称轴共有四个交点，即 A_1，A_2 和 B_1，B_2（如图 2-6），这四个点叫做**椭圆的顶点**．在 $a>b>0$的条件下，线段 A_1A_2 叫做**椭圆的长轴**，它的长等于 $2a$；线段 B_1B_2 叫做**椭圆的短轴**，它的长等于 $2b$. 显然，椭圆的两个焦点在它的长轴上.

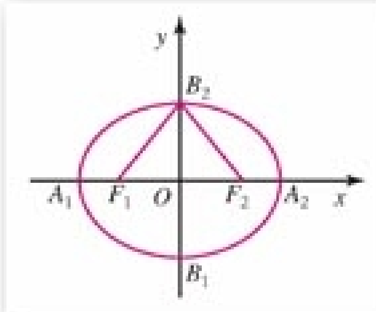


图 2-6

于是，在椭圆的方程①中，a，b 分别是椭圆的长半轴的长和短半轴的长. 又设椭圆的焦距为 $2c$，则 c 是椭圆的半焦距. 由 a，b，c 满足关系式：$a^2=b^2+c^2$，可知长度分别为 a，b，c 的三条线段构成一个直角三角形，长度为 a 的线段是斜边.

图 2-6 中，F_1，F_2 是椭圆的焦点，A_1，A_2，B_1，B_2 是椭圆的顶点. 可知$|OA_1|=|OA_2|=a$，$|OB_1|=|OB_2|=b$，$|OF_1|=|OF_2|=c$，还有$|B_2F_1|=|B_2F_2|=a$. 因此，直角三角形 F_2OB_2(或 F_1OB_2)直观地显示出 a，b，c 三者之间的关系.

4. 离心率

给定方程①中 a，b 的值，则椭圆 C 的形状完全确定. 如图 2-7(1)(2)(3)，它们分别表示椭圆 C_1：$\frac{x^2}{16}+y^2=1$；椭圆 C_2：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$；椭圆 C_3：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. 观察这三个椭圆的形状，可见椭圆 C_1 较扁，椭圆 C_3 显得“圆”一些，而椭圆 C_2 的扁平程度介于它们之间. 注意到椭圆 C_1，C_2，C_3 对应的$\frac{b}{a}$的值依次为$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$，容易看出$\frac{b}{a}$的值的大小对椭圆扁平程度所产生的影响，因此$\frac{b}{a}$的值可以刻画椭圆的扁平程度.

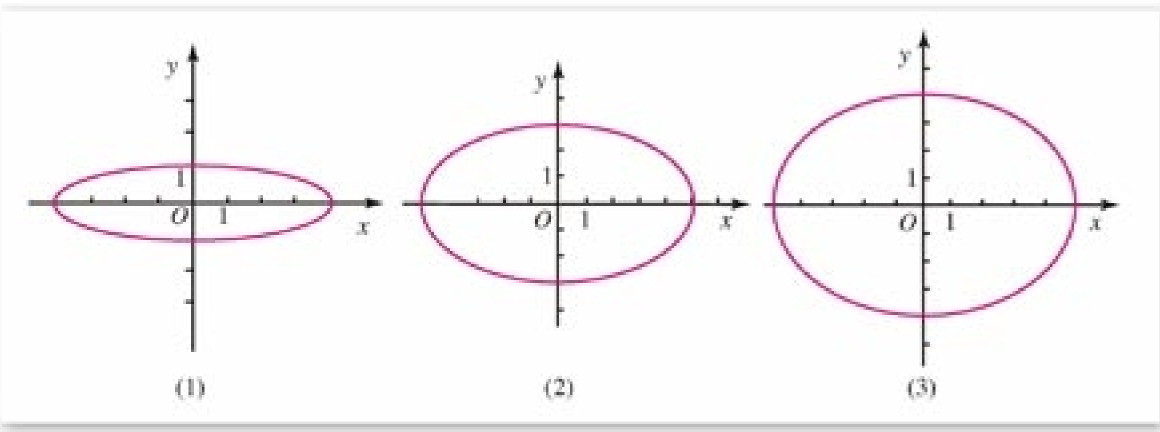


图 2-7

我们知道，椭圆的长半轴长 a、短半轴长 b、半焦距 c 三者满足关系式 $a^2=b^2+c^2$，所

以讨论$\frac{b}{a}$可转化为讨论$\frac{c}{a}$. 在椭圆的研究中，$\frac{c}{a}$有重要的意义，这个比值叫做**椭圆的离心率**，并用 e 表示，即离心率 $e=\frac{c}{a}$. 因为 $a>c>0$，所以$0<e<1$.

由 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\sqrt{1-e^2}$，

可知 e 越大则$\frac{b}{a}$越小；e 越小则$\frac{b}{a}$越大. 所以当 e 变大而越接近于 1 时，则$\frac{b}{a}$变小而越接近于 0，椭圆越扁平；当 e 变小而越接近于 0 时，则$\frac{b}{a}$变大而越接近于 1，椭圆越接近于圆. 我们常用椭圆的离心率 e 来刻画它的扁平程度.

例 1 求椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 的长轴长和短轴长、焦点坐标及顶点坐标，并用描点法画出它的图形.

解：把椭圆的方程化为标准方程

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

可知此椭圆的焦点在 x 轴上，且长半轴长 $a=3$，短半轴长$b=2$；又得半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$.

因此，椭圆的长轴长 $2a=6$，短轴长 $2b=4$；两个焦点的坐标分别是$(-\sqrt{5}, 0)$，$(\sqrt{5}, 0)$；四个顶点的坐标分别是$(-3, 0)$，$(3, 0)$，$(0, -2)$，$(0, 2)$.

为画此椭圆的图形，将椭圆方程变形为

$$y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\ (-3\leqslant x\leqslant 3).$$

由 $y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant 3)$，可求出椭圆的两个顶点及其在第一象限内一些点的坐标(x, y)，列表如下：

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	2	1.97	1.89	1.73	1.49	1.11	0

描点再用光滑曲线顺次连结这些点，得到椭圆在第一象限的图形，然后利用椭圆的对称性画出整个椭圆，如图 2-8 所示.

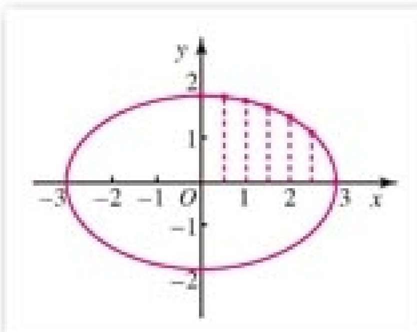


图 2-8

例 2 在我国某卫星发射基地升空的“探测一号”赤道星，运行的轨道是以地球的中心为一个焦点的椭圆，其近地点与地球表面相距555 km，远地点与地球表面相距74 051 km. 已知地球半径约为6 371 km，求“探测一号”星运行轨道的近似方程(长、短半轴长精确到 1 km).

分析：设“探测一号”星运行的椭圆形轨道的中心为点 O，地球的中心为点 F，则椭

圆的长轴在直线 OF 上，长轴的两个端点分别是轨道上的近地点和远地点．适当建立平面直角坐标系，可求得轨道的标准方程．

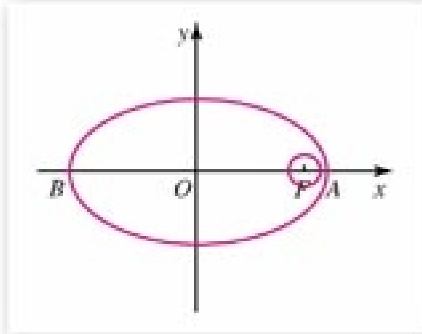


图 2-9

解：以“探测一号”星运行的椭圆形轨道的中心 O 为原点，如图 2-9 建立平面直角坐标系 xOy，使地球中心 F 在 x 轴上．点 $F(c,\ 0)$ 是椭圆的焦点，椭圆与 x 轴的交点 A，B 分别是近地点和远地点．

设所求的“探测一号”星运行轨道方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

由已知，得

$$a-c=|FA|=6\ 371+555=6\ 926,$$
$$a+c=|FB|=6\ 371+74\ 051=80\ 422,$$

解得

$$a=43\ 674;$$

又可知 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{(a+c)(a-c)}=\sqrt{80\ 422\times 6\ 926}\approx 23\ 601.$

因此，所求的运行轨道近似方程为

$$\frac{x^2}{43\ 674^2}+\frac{y^2}{23\ 601^2}=1.$$

例 3 有一椭圆形溜冰场，长轴长 100 m，短轴长60 m．现要在这溜冰场上划定一个各顶点都在溜冰场边界上的矩形区域，且使这个矩形区域的面积最大，那么应把这个矩形的顶点定在何处？这时矩形的面积是多少？

解：分别以椭圆的长轴、短轴所在的直线为 x 轴、y 轴，如图 2-10 建立直角坐标系 xOy．

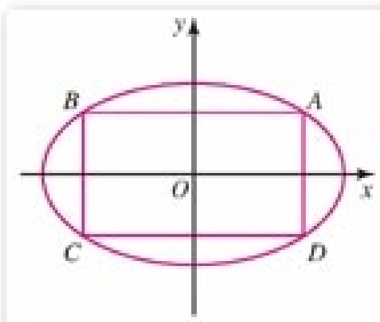


图 2-10

由于矩形 $ABCD$ 的各顶点都在椭圆上，矩形又是中心对称图形，还是以过对称中心且垂直其一边的直线为对称轴的轴对称图形，所以矩形 $ABCD$ 关于原点 O 以及 x 轴、y 轴对称．

已知椭圆的长轴长 $2a=100$ m，短轴长 $2b=60$ m，得椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{50^2}+\frac{y^2}{30^2}=1.$$

设顶点 A 的坐标为 $(x_0,\ y_0)$，$x_0>0$，$y_0>0$，则

$$\frac{x_0^2}{50^2}+\frac{y_0^2}{30^2}=1,$$

得

$$y_0^2=30^2\left(1-\frac{x_0^2}{50^2}\right)=\frac{30^2}{50^2}(50^2-x_0^2).$$

矩形 $ABCD$ 面积 $S=4x_0y_0$．

由 $x_0^2y_0^2=x_0^2\cdot\frac{30^2}{50^2}(50^2-x_0^2)=\frac{30^2}{50^2}(-x_0^4+50^2x_0^2)$

$$=\frac{30^2}{50^2}\left[-\left(x_0^2-\frac{50^2}{2}\right)^2+\frac{50^4}{4}\right],$$

可知当 $x_0^2=\frac{50^2}{2}$ 时 $x_0^2y_0^2$ 有最大值，这时 $S=4x_0y_0$ 也有最大值.

所以当 $x_0=\frac{50}{\sqrt{2}}=25\sqrt{2}$ 时，$S_{最大}=3\ 000(\mathrm{m}^2)$.

因此在椭圆短轴两侧分别画一条与短轴平行且相距 $25\sqrt{2}$ m 的直线，这两条直线与椭圆的交点就是所划矩形区域的顶点. 这个最大矩形的面积是 3 000 m^2.

思考与讨论

椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的内接矩形（各顶点都在椭圆上的矩形）的最大面积等于多少？

练习A

1. 求下列椭圆的长轴长和短轴长、焦点坐标、顶点坐标、离心率：

（1）$x^2+9y^2=81$；　　（2）$25x^2+9y^2=225$；

（3）$16x^2+y^2=25$；　　（4）$4x^2+5y^2=1$.

2. 根据下列条件，求椭圆的标准方程：

（1）长轴长和短轴长分别为 8 和 6，焦点在 x 轴上；

（2）焦距是 12，离心率是 $\frac{3}{4}$，焦点在 x 轴上；

（3）经过 $P(-2,0)$，$Q(0,-3)$ 两点；

（4）一焦点坐标为 $(-3,0)$，一顶点坐标为 $(0,5)$.

3. 已知直线和椭圆的方程如下，求它们的公共点坐标：

（1）$3x+10y-25=0$，$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$；

（2）$3x-y+2=0$，$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

练习B

1. 已知$M(4, 2)$是直线l被椭圆$x^2+4y^2=36$所截得的线段的中点，求直线l的方程.

2. 1970年4月24日我国发射的第一颗人造地球卫星，运行的轨道是以地球中心为一个焦点的椭圆，近地点与地球表面相距439 km，远地点与地球表面相距2 384 km. 已知地球半径约为6 371 km，试建立适当的平面直角坐标系，求这颗卫星运行轨道的近似方程（长、短半轴长精确到0.1 km）.

习题2-1 A

1. 根据下列条件，求椭圆的标准方程：

(1) 焦点在x轴上，焦距为2，椭圆上一点M与两焦点的距离的和等于6；

(2) 一个焦点坐标是$(3, 0)$，过点$A(-5, 0)$；

(3) 一个焦点坐标是$(0, 4)$，过点$B(1, \sqrt{15})$；

(4) 焦距为$2\sqrt{15}$，离心率等于$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$；

(5) 长轴长是短轴长的5倍，过点$P(6, 2)$.

2. 求下列椭圆的长轴长和短轴长、焦点坐标和顶点坐标：

(1) $\dfrac{4x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$；　　(2) $m^2x^2+4m^2y^2=1$ $(m>0)$.

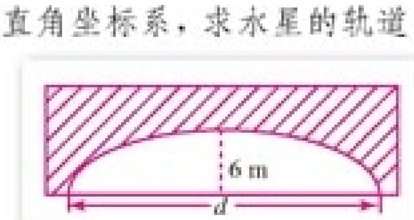
3. 已知椭圆$kx^2+5y^2=5$的一个焦点坐标是$(2, 0)$，求k的值.

4. 已知F_1，F_2是椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$的两个焦点，点$P$在椭圆上. 如果$\triangle PF_1F_2$是直角三角形，求点$P$的坐标.

5. 设椭圆的对称轴为坐标轴，短轴的一个端点与两焦点是一个正三角形的顶点，焦点与椭圆上的点的最短距离为$\sqrt{3}$，求这个椭圆的方程和离心率.

6. 水星运转的轨道是以太阳的中心为一个焦点的椭圆，椭圆上的点离太阳中心最近的距离约为4.7×10^8 km，最远的距离约为7.05×10^8 km. 设以这个轨道的中心为原点，以太阳中心及轨道中心所在的直线为x轴，建立直角坐标系，求水星的轨道的方程（保留3位有效数字）.

7. 某隧道的拱线设计为半个椭圆的形状，最大拱高h为6 m，如图所示：路面设计是双向四车道，车道总宽度为22 m. 如果限制通行车辆的高度不超过4.5 m，



（第7题）

那么隧道设计的拱宽 d 至少是多少米（精确到 0.01）？

习题 2-1 B

1. 已知方程 $(3m+7)x^2+(3m+4)y^2=5m+12$ 表示的曲线是椭圆，求实数 m 的取值范围.
2. 已知椭圆的一个顶点 $B(0, -1)$，焦点在 x 轴上，其右焦点到直线 $y=x+2\sqrt{2}$ 的距离等于 3，求这个椭圆的标准方程.
3. 已知点 $A(1, 1)$，F_1 是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的左焦点，P 是椭圆上任意一点，求 $|PF_1|+|PA|$ 的最小值.
4. 已知 F_1，F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的焦点，点 P 在椭圆上且 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，求点 P 的坐标.

2.2 双曲线

2.2.1 双曲线及其标准方程

我们已经知道，在平面内到两个定点的距离之和等于定长(大于两定点距离)的点的轨迹是椭圆，而且在练习中曾利用两组同心圆描点画出椭圆．我们容易联想到另一个问题：与两个定点的距离的差等于定值的点的轨迹会是什么曲线？以下还用同心圆描点的方法进行探究：

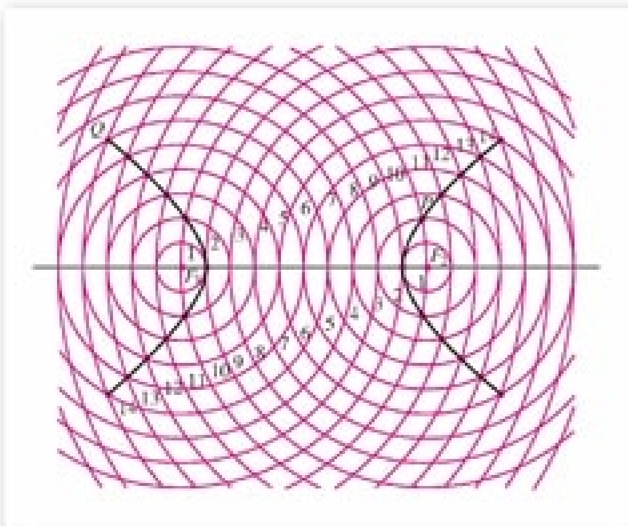


图 2-11

如图 2-11 所示，两组同心圆分别以 F_1，F_2 为圆心，每组同心圆的半径依次是 1，2，3，…，按逐次“加 1”的次序依次递增．$|F_1F_2|=10$，用 r_1，r_2 分别表示圆心为 F_1，F_2 的圆的半径．图中靠近点 F_2 的黑点，是满足 $r_1-r_2=8$ 的两圆的交点，如点 P 是 $r_1=10$ 的圆与 $r_2=2$ 的圆的交点，可知 $|PF_1|-|PF_2|=10-2=8$；图中靠近点 F_1 的黑点，是满足 $r_2-r_1=8$ 的两圆的交点，如点 Q 是 $r_1=6$ 的圆与 $r_2=14$ 的圆的交点，可知 $|QF_2|-|QF_1|=14-6=8$．因此，图中任一黑点 M 满足 $\big||MF_1|-|MF_2|\big|=|r_1-r_2|=8$．观察这些黑点的分布，它们分左、右两支，分别向上、下两方延伸．把所有满足条件 $\big||MF_1|-|MF_2|\big|=8$ 的点 M 分别用光滑的曲线顺次连结，就可以显示出这一图形的形象是左、右两支的曲线，我们称它为双曲线．

一般地，我们归纳双曲线的定义如下：

在平面内到两个定点 F_1，F_2 的距离之差的绝对值等于定值 $2a$（大于 0 且小于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹叫做**双曲线**．这两个定点叫做**双曲线的焦点**，两焦点的距离叫做**双**

曲线的焦距.

思考与讨论

在双曲线定义中，设“距离差”的绝对值等于定值 $2a$，则有限制条件 $0<2a<|F_1F_2|$. 如果 $2a\geqslant|F_1F_2|>0$，那么平面内到两个定点 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于定值 $2a$ 的点的轨迹如何?

我们参照推导椭圆方程的方法，来探求双曲线的方程.

以过焦点 F_1，F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系，如图 2-12 所示.

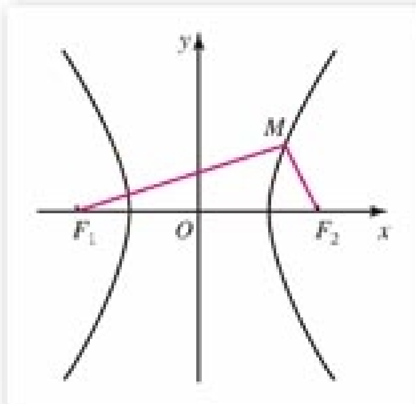


图 2-12

设 $M(x, y)$是双曲线上的任意一点，双曲线的焦距是 $2c$ ($c>0$)，则 F_1，F_2 的坐标分别是$(-c, 0)$，$(c, 0)$. 又设点 M 与 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于常数 $2a$，$0<a<c$.

由双曲线的定义可知，点 M 在双曲线上的条件是

$\big||MF_1|-|MF_2|\big|=2a$，即$|MF_1|-|MF_2|=\pm 2a$.

因为$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，$|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，

所以
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \qquad ①$$

把①式移项，得
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

两边平方，得
$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

整理，得 $cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

两边再平方，得
$$(cx-a^2)^2=a^2[(x-c)^2+y^2],$$

整理后，得
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

因为 $c>a>0$，所以 $c^2-a^2>0$. 设 $c^2-a^2=b^2$，$b>0$，则上式化为
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0).} \qquad ②$$

显然，双曲线上任意一点 M 的坐标(x, y)适合方程②；反之，如果一点 M 的坐标(x, y)适合方程②，可以证明$\big||MF_1|-|MF_2|\big|=2a$ (证明略)，即点 M 在此双曲线上.

所以方程②表达了双曲线的特征性质，我们把它叫做**双曲线的标准方程**．它所表示的双曲线，两焦点在 x 轴上，焦点坐标分别为 $(-c,\ 0)$，$(c,\ 0)$，这里 $c^2=a^2+b^2$．

如果所建立的直角坐标系是以过 F_1，F_2 的直线为 y 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 x 轴（图 2-13），这时 $F_1(0,\ -c)$，$F_2(0,\ c)$，那么只要将方程②中的 x，y 互换就可以得到它的方程

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0).$$

这个方程也是双曲线的标准方程，其中 $b^2=c^2-a^2$．

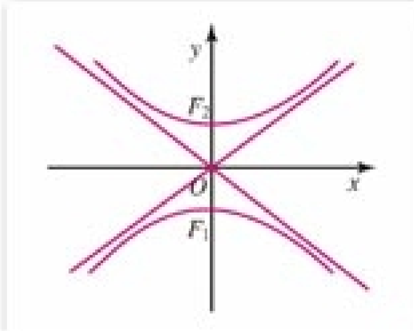


图 2-13

例 1　根据下列条件，求双曲线的标准方程：

（1）两个焦点的坐标分别是 $(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$，双曲线上的点与两焦点的距离的差的绝对值等于 8；

（2）两个焦点的坐标分别是 $(0,\ -6)$，$(0,\ 6)$，且双曲线经过点 $A(-5,\ 6)$．

解：（1）由已知得 $c=5$，$2a=8$，即 $a=4$．

因为 $c^2=a^2+b^2$，所以 $b^2=c^2-a^2=5^2-4^2=9$．

又双曲线的焦点在 x 轴上，因此所求的双曲线标准方程是

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

（2）由已知得 $c=6$，且焦点在 y 轴上．

因为点 $A(-5,\ 6)$ 在双曲线上，所以点 A 与两焦点的距离的差的绝对值是常数 $2a$，即

$$2a=\left|\sqrt{(-5)^2+(6+6)^2}-\sqrt{(-5)^2+(6-6)^2}\right|=|13-5|=8,$$

得 $a=4$，$b^2=c^2-a^2=6^2-4^2=20$．

因此，所求的双曲线标准方程是

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{20}=1.$$

说明：题(2)也可用待定系数法求解，可设双曲线的方程为

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.$$

由已知半焦距 $c=6$，点 $A(-5,\ 6)$ 在双曲线上，得

$$a^2=36-b^2,\ 且\frac{36}{a^2}-\frac{25}{b^2}=1.$$

于是可求出 b^2，从而得到双曲线的标准方程．

思考与讨论

如果已知点 $M(x, y)$ 与点 $F_1(-5, 0)$ 的距离比它与点 $F_2(5, 0)$ 的距离大 8，试求点 M 的轨迹方程. 并与例 1(1)比较有什么联系和区别？

【提示】这个问题中的点 M 应满足的条件与例 1(1) 中的点(设为 M)应满足的条件有区别.

本题中的点 M 的轨迹是例 1(1) 中双曲线的右支，它的方程是

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\ (x\geqslant 4).$$

例 2　已知双曲线 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{45}=1$.

(1) 求此双曲线的左、右焦点 F_1，F_2 的坐标；

(2) 如果此双曲线上一点 P 与焦点 F_1 的距离等于 16，求点 P 与焦点 F_2 的距离.

解：(1) 根据双曲线的方程，可知此双曲线的焦点在 x 轴上.

由 $a^2=36$，$b^2=45$，得

$$c^2=a^2+b^2=36+45=81.$$

所以 $c=9$，焦点 F_1，F_2 的坐标分别为$(-9, 0)$，$(9, 0)$.

(2) 因为点 P 在双曲线上，所以

$$\big||PF_1|-|PF_2|\big|=2a.$$

由 $a=6$，$|PF_1|=16$，得

$$16-|PF_2|=\pm 12.$$

因此，$|PF_2|=4$，或 $|PF_2|=28$.

说明：例 2(2)是利用双曲线的定义求解，解的结果表明：点 P 可能在双曲线的右支上，也可能在左支上. 以 F_1 为圆心，16 为半径画圆，可见此圆与双曲线有四个交点，它们就是点 P 在双曲线上可能的位置，如图 2-14 所示.

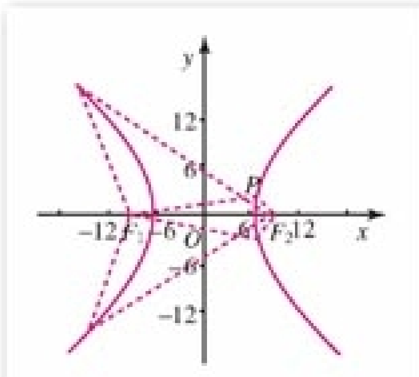


图 2-14

练习A

1. 根据下列条件，求双曲线的标准方程：

(1) $a=3$，$b=4$，焦点在 x 轴上；

(2) 焦点是 $F_1(0, -6)$和 $F_2(0, 6)$，经过点 $A(2, -5)$；

(3) 焦点在 x 轴上，经过点 $P(4, -2)$和点 $Q(2\sqrt{6}, 2\sqrt{2})$；

(4) $a=5$，$c=8$.

2. 已知双曲线 C 的方程是 $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{20}=1$.

(1) 求双曲线 C 的焦点 F_1，F_2 的坐标；

(2) 如果双曲线 C 上一点 P 与焦点 F_1 的距离等于 8，求点 P 与焦点 F_2 的距离.

练习B

1. 已知点 P 在双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{12}=1$ 上，它的横坐标与双曲线的右焦点的横坐标相同，求点 P 与双曲线的左焦点的距离.

2. 已知双曲线 $x^2-y^2=m$ 与椭圆 $2x^2+3y^2=72$ 有相同的焦点，求 m 的值.

例3 已知椭圆 C 的方程是 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$，求平面内与椭圆 C 在 y 轴上的两个顶点的距离的差的绝对值等于椭圆 C 的焦距的点的轨迹方程.

解：由椭圆 C 的方程可知，它在 y 轴上的两个顶点分别是 $B_1(0, -2\sqrt{3})$，$B_2(0, 2\sqrt{3})$；椭圆的焦距是 $2\sqrt{16-12}=4$.

因为 $|B_1B_2|=4\sqrt{3}>4$，所以平面内与 B_1，B_2 两点的距离的差的绝对值等于 4 的点的轨迹是以 B_1，B_2 为焦点的双曲线，由常数 $2a=4$，即 $a=2$，半焦距 $c=2\sqrt{3}$，可得

$$b^2=c^2-a^2=12-4=8.$$

因此，所求的轨迹方程是

$$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{8}=1.$$

例4 相距 2 000 m 的两个哨所 A，B，听到远处传来的炮弹爆炸声. 已知当时声速是 330 m/s，在 A 哨所听到爆炸声的时间比在 B 哨所听到时晚 4 s，试判断爆炸点在什么样的曲线上，并求出曲线的方程.

分析：爆炸点与哨所 A，B 的“距离差”等于声速乘以两哨所所听到爆炸声的“时间差”，且爆炸点距 B 哨所较近.

解：设爆炸点 P，由已知条件，可得

$$|PA|-|PB|=330\times 4=1\ 320(\text{m}).$$

因为 $|AB|=2\ 000>1\ 320$，又 $|PA|>|PB|$，所以点 P 在以 A，B 为焦点的双曲线的靠近 B 处的那一支上.

如图 2-15 建立直角坐标系，使 A，B 两点在 x 轴上，线段 AB 的中点为坐标原点.

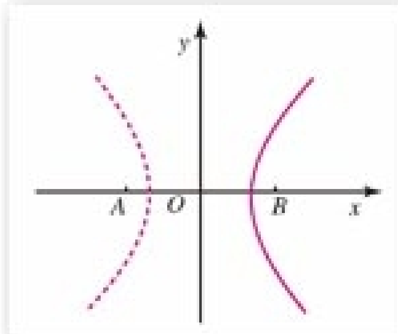


图 2-15

由 $2a=1\ 320$，$2c=2\ 000$，得

$$a=660,\ c=1\ 000,$$

$$b^2=c^2-a^2=564\ 400.$$

因此，点 P 所在曲线的方程是

$$\frac{x^2}{435\ 600}-\frac{y^2}{564\ 400}=1\ (x>0).$$

练习A

1. 如果方程 $\dfrac{x^2}{m+2}+\dfrac{y^2}{m+1}=1$ 表示双曲线，求 m 的取值范围，并指出此双曲线的焦点坐标.
2. 在相距 1 400 m 的 A，B 两观察站，在 A 站听到炮弹爆炸声的时间比在 B 站听到时早 4 s. 已知音速为 340 m/s，求炮弹爆炸点所在曲线的方程.

练习B

1. 双曲线 $3mx^2-my^2=3$ 的一个焦点坐标是 $(-2,\ 0)$，求 m 的值.
2. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，直线 l 过点 F_1，交双曲线左支于 A，B 两点，且 $|AB|=d$，求 $\triangle ABF_2$ 的周长.

2.2.2 双曲线的几何性质

我们利用双曲线 C 的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0) \qquad ①$$

来研究双曲线的一些几何性质.

1. 范围

由方程①可知，双曲线 C 上任意一点的坐标 $(x,\ y)$ 都适合不等式

$$\frac{x^2}{a^2}\geqslant 1,$$

得 $$x\geqslant a \text{ 或 } x\leqslant -a.$$

所以双曲线 C 位于两直线 $x=a$ 和 $x=-a$ 所夹平面区域的外侧，如图 2-16 所示.

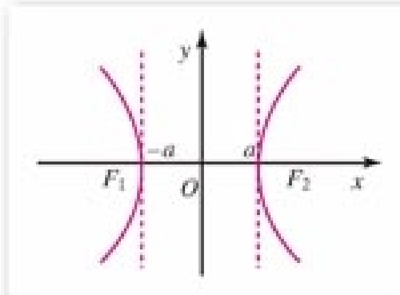


图 2-16

2. 对称性

类似于对椭圆对称性的讨论，可知双曲线 C 是以 x 轴、y 轴为对称轴的轴对称图形；也是以原点为对称中心的中心对称图形. 这个对称中心叫做**双曲线的中心**.

3. 顶点

在方程①中，令 $y=0$，得 $x=\pm a$，可知双曲线 C 与 x 轴有两个交点，分别是 $A_1(-a,\ 0)$ 和 $A_2(a,\ 0)$. 令 $x=0$，得 $y^2=-b^2$，这个方程没有实数根，说明双曲线 C 与 y 轴没有公共点.

双曲线与它的对称轴的两个交点叫做**双曲线的顶点**. 如图 2-17 所示，双曲线 C 的顶点是 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，这两个顶点是双曲线两支中相距最近的点. 线段 A_1A_2 叫做双曲线的实轴，它的长等于 $2a$. 同时，在 y 轴上作点 $B_1(0,\ -b)$，$B_2(0,\ b)$，线段 B_1B_2 叫做双曲线的虚轴，它的长等于 $2b$. 相应地，a，b 分别是双曲线的实半轴长和虚半轴长.

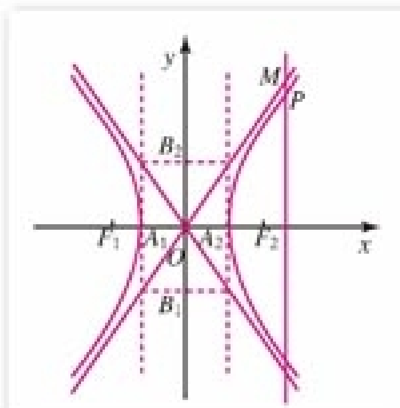


图 2-17

4. 渐近线

观察图 2-17 中方程①所表示的双曲线 C. 在直线 $x=a$ 的右侧，当 x 逐渐增大时，双曲线的右支向右上和右下逐渐延伸；在直线 $x=-a$ 的左侧，当 x 逐渐减小时，双曲线的左支向左上和左下逐渐延伸.

双曲线向外无限延伸时，总是局限在由直线 $y=\frac{b}{a}x$ 和直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 相交而分平面所成的、含双曲线焦点的两个角域内，并与这两条直线无限接近，但永远不会与这两条直线相交，如图 2-17 所示.

直线 $y=\frac{b}{a}x$ 和直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 叫做双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线.

> **注**
>
> 双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 的渐近线方程是
>
> $$y=\pm\frac{a}{b}x.$$

5. 离心率

双曲线的半焦距 c 与实半轴 a 的比叫做**双曲线的离心率**，用 e 表示，即离心率 $e=\frac{c}{a}$.

因为 $c>a>0$，所以双曲线的离心率 $e>1$.

由等式 $a^2+b^2=c^2$，可得

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2-1}=\sqrt{e^2-1}.$$

因此 e 越大，$\frac{b}{a}$ 也越大，即渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 的斜率的绝对值越大，这时双曲线的形状就从扁狭逐渐变得开阔. 由此可见，双曲线的离心率 e 越大，它的开口就越开阔，我们常用 e 来刻画双曲线的开口程度.

例 1　已知双曲线的焦点在 x 轴上，中心在原点，如果焦距为 8，实轴长为 6，求此双曲线的标准方程及其渐近线的方程，并画出它的图形.

解：由已知可得 $2c=8$，$2a=6$，所以

$$c=4，a=3，b^2=c^2-a^2=4^2-3^2=7.$$

又此双曲线的焦点在 x 轴上，因此所求的双曲线标准方程为

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1,$$

渐近线方程是

$$y=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}x.$$

画图：（1）在 x 轴上取点 $A_1(-3, 0)$，$A_2(3, 0)$，在 y 轴上取点 $B_1(0, -\sqrt{7})$，$B_2(0, \sqrt{7})$；作矩形 $ABCD$，使它的四边分别过点 A_1，A_2，B_1，B_2，且与 y 轴或 x 轴平行；再作直线 AC 和 BD，则它们是双曲线的渐近线.

（2）求出双曲线上一些点的坐标. 列表如下：

x	3	4	5	6	7	…
y	0	2.3	3.5	4.6	5.6	…

（3）描点连线，并使曲线与渐近线逐渐接近，得到双曲线在第一象限的图形，然后利用双曲线的对称性画出整个双曲线，如图 2-18 所示.

例 2 求双曲线 $16x^2-9y^2=144$ 的实轴长和虚轴长、顶点坐标、焦点坐标、渐近线方程.

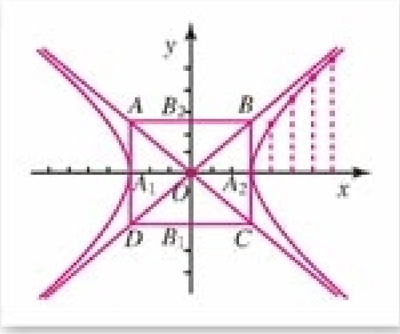


图 2-18

解：把双曲线方程化为标准方程

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

由此可知，实半轴长 $a=3$，虚半轴长 $b=4$.

半焦距 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=5$.

因此，

实轴长 $2a=6$，虚轴长 $2b=8$；

顶点的坐标是$(-3,\ 0)$，$(3,\ 0)$；

焦点的坐标是$(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$；

渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$.

例 3 一双曲线型自然通风塔的外型，是双曲线的一部分绕其虚轴所在直线旋转所成的曲面(图 2-19(1))，它的最小直径为 24 m，上口直径为 26 m，下口直径为 50 m，高为 55 m. 在如图2-19(2)所给的直角坐标系中求此双曲线的近似方程(虚半轴长精确到 1 m).

分析：所给直角坐标系的 y 轴是双曲线的虚轴，原点是通风塔最小圆的圆心，x 轴是这个最小圆的直径所在的直线. 可知坐标轴是双曲线的对称轴，最小圆的直径 $A'A$ 的端点 A'，A 是双曲线的顶点.

解：在给定的直角坐标系中，可设双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0).$$

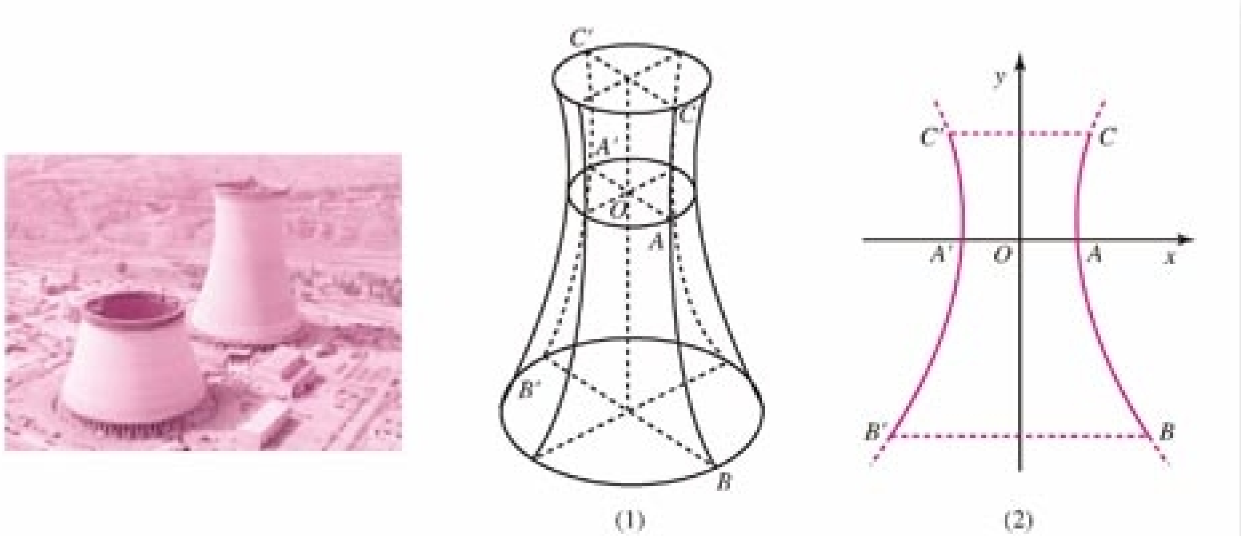


图 2-19

由已知通风塔的最小直径 $A'A=24$ m，上口直径 $C'C=26$ m，下口直径 $B'B=50$ m，可知 $a=12$，点 B，C 的横坐标分别为 25，13.

设 B，C 的纵坐标分别为 y_1，y_2，其中 $y_1<0$，$y_2>0$. 因为$B(25,\ y_1)$，$C(13,\ y_2)$

在双曲线上，所以

$$\begin{cases}\dfrac{25^2}{12^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1\\[2ex]\dfrac{13^2}{12^2}-\dfrac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$$

解得

$$y_1=-\frac{b}{12}\sqrt{25^2-12^2}=-\frac{\sqrt{481}}{12}b,$$

$$y_2=\frac{b}{12}\sqrt{13^2-12^2}=\frac{5}{12}b.$$

因为塔高为 55 m，所以 $y_2-y_1=55$，即

$$\frac{5}{12}b+\frac{\sqrt{481}}{12}b=55,$$

解得

$$b\approx 25.$$

所以此双曲线的近似方程为

$$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{625}=1\ (y_1\leqslant y\leqslant y_2).$$

练习A

1. 求下列双曲线的实轴长和虚轴长、焦点坐标及渐近线方程：

(1) $x^2-y^2=4$；　　(2) $-9x^2+y^2=81$；

(3) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=1$；　　(4) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=4$.

2. 已知双曲线一焦点坐标为(5，0)，一渐近线方程为 $3x-4y=0$，求此双曲线的标准方程和离心率.

3. 求双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的渐近线方程，并画出此双曲线的图形.

练习B

1. 根据下列条件，求双曲线的标准方程：

(1) 它与双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 有共同的渐近线，且经过点 $A(2\sqrt{3},\ -3)$；

(2) 两顶点间的距离是 6，两焦点连线被两顶点和中心四等分.

2. 求双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{36}=1$ 上任意一点 P 到两条渐近线的距离乘积的值.

探索与研究

在例 2 中，双曲线 $16x^2-9y^2=144$ 的渐近线方程一般式为

$$4x\pm 3y=0.$$

试任取一个正实数 t，求双曲线 $16x^2-9y^2=t^2$ 或双曲线 $16x^2-9y^2=-t^2$ 的渐近线方程，是否得到所求的渐近线方程都是 $4x\pm 3y=0$？

再进一步研究：(1) 如果双曲线方程为

$$\alpha^2x^2-\beta^2y^2=k\ (其中\ \alpha>0,\ \beta>0,\ k\neq 0),$$

那么双曲线的渐近线方程是什么？

(2) 如果双曲线的渐近线方程为 $mx\pm ny=0$ ($m>0$, $n>0$)，那么双曲线方程的一般形式是什么？

习题 2-2 A

1. 根据下列条件，求双曲线的标准方程：

(1) 焦点在 x 轴上，焦距为 10，双曲线上一点 M 与两焦点的距离的差的绝对值等于 6；

(2) 焦距为 26，且经过点 $P(0, 12)$；

(3) 焦点在 x 轴上，实轴长等于 8，虚轴长等于 2；

(4) 焦点 F_1，F_2 在 x 轴上，$|F_1F_2|=12$，顶点 A_1，A_2 是线段 F_1F_2 的三等分点；

(5) 离心率 $e=\sqrt{5}$，过点 $P(4, 4\sqrt{3})$.

2. 已知双曲线 C 的方程是 $4x^2-\dfrac{4y^2}{3}=1$.

(1) 求双曲线 C 的焦点 F_1，F_2 的坐标；

(2) 如果双曲线 C 上一点 P 与焦点 F_1 的距离等于它到焦点 F_2 的距离的 2 倍，求点 P 与焦点 F_1 的距离.

3. 求下列双曲线的实轴长和虚轴长、焦点坐标和顶点坐标、渐近线方程：

(1) $\dfrac{9x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$； (2) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{m}=1$.

4. 已知直线 l_1：$5x+3y=0$ 和 l_2：$5x-3y=0$.

(1) 写出两个以直线 l_1 和 l_2 为渐近线的双曲线的标准方程；

(2) 如果以直线 l_1 和 l_2 为渐近线的双曲线经过点 $P(1, 3)$，求此双曲线的标准方程.

5. 已知双曲线的两个焦点为 F_1，F_2，虚轴的一个端点 B，且 $\angle F_1BF_2=\dfrac{2\pi}{3}$，求此双曲线的离心率.

6. 已知 F_1，F_2 是双曲线 $3x^2-5y^2=15$ 的两个焦点，点 A 在双曲线上，且$\triangle F_1AF_2$ 的面积等于 $2\sqrt{2}$，求$\angle F_1AF_2$ 的大小.

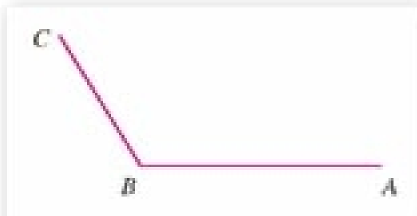
习题 2-2 B

1. 已知方程 $\dfrac{x^2}{m^2-1}+\dfrac{y^2}{m-2}=1$ 表示焦点在 x 轴上的双曲线，求实数 m 的取值范围.

2. 已知双曲线与椭圆 $4x^2+y^2=64$ 有共同的焦点，双曲线的实轴长与虚轴长之比为 $\sqrt{3}:3$，求双曲线的方程.

3. 点 P 与两个定点 $M(-6,\ 0)$，$N(6,\ 0)$的连线的斜率的乘积是$\dfrac{4}{9}$，求点 P 的轨迹方程.

4. 如图，A，B，C 是三个观察哨，A 在 B 的正东，两地相距6 km，C 在 B 的北偏西 30°，两地相距 4 km. 在某一时刻，A 观察哨发现某种信号，并知道该信号的传播速度为1 km/s；4 s 后 B，C 两个观察哨同时发现这种信号. 在以过 A，B 两点的直线为 x 轴，以线段 AB 的垂直平分线为y 轴的直角坐标系中，指出发了这种信号的地点 P 的坐标.



（第4题）

2.3 抛物线

2.3.1 抛物线及其标准方程

我们在操场上投掷铅球，或者进行排球比赛时向对方抛发球，看到的铅球、排球运行的轨道，都是抛物线的形象．抛物线是一种常见的曲线，它的应用也很广泛．例如太阳灶、探照灯、雷达天线、射电望远镜等，都是利用抛物线的原理制成的．

我们曾经利用两组同心圆直观地认识了椭圆和双曲线，现在将其中一组同心圆换成一组平行线(图 2-20)，再对一些特殊的点采用类似的方法来进行观察和分析．

在图 2-20 中，以 F 为圆心的一组同心圆，它们的半径 r 依次为 1，2，3，…，按“加 1”依次递增；一组与直线 l 平行的直线都与过点 F 的直线 m 垂直，相邻两平行线的间距为 1．直线 l 在点 F 左侧且与点 F 的距离为 4；从 l 向右顺次记各平行线为 l_1，l_2，l_3，…．

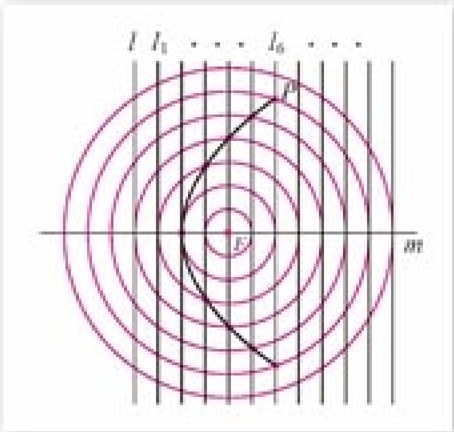


图 2-20

观察图中的黑点，如点 P，它是 $r=6$ 的圆与直线 l_6 的交点，即点 P 与点 F 的距离等于点 P 与直线 l 的距离；图中所有的黑点都满足条件：与点 F 的距离等于它与直线 l 的距离．如果用光滑的曲线顺次连结这些黑点，可见所得曲线具有抛物线的形象．如果选取的直线 l 与点 F 的距离等于其他定值，那么类似地描点，还可以画出不同的抛物线．

在直观描点、画图的基础上，我们归纳抛物线的定义如下：

平面内到一个定点 F 和一条定直线 $l(F\notin l)$ 的距离相等的点的轨迹叫做**抛物线**．点 F 叫做**抛物线的焦点**，直线 l 叫做**抛物线的准线**，焦点到准线的距离(定长 p)叫做**抛物线的焦参数**．

下面我们根据抛物线的定义来探求它的方程．

如图 2-21 所示，过焦点 F 作准线 l 的垂线，垂足为 K．以直线 KF 为 x 轴，线段 KF 的中垂线为 y 轴，建立直角坐标系 xOy．

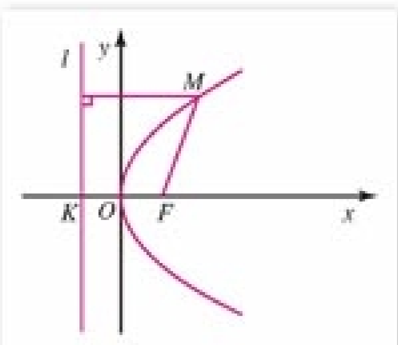


图 2-21

设 $|KF|=p\ (p>0)$，则焦点 F 的坐标为 $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$，准线 l 的方程为 $x=-\frac{p}{2}$．

再设 $M(x,\ y)$ 是抛物线上的任意一点，点 M 到直线 l 的距离为 d，由抛物线的定义可知，点 M 在抛物线上的条

件是

$$|MF|=d.$$

因为$|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$，$d=\left|x+\frac{p}{2}\right|$，

所以
$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

将上式两边平方并化简，得

$$\boxed{y^2=2px\ (p>0).} \tag{①}$$

容易看出，抛物线上任意一点M的坐标(x, y)适合方程①；同样可以证明，如果点M的坐标(x, y)适合方程①，那么$|MF|=d$成立(证明略)，即点M在抛物线上. 所以方程①表达了抛物线的特征性质，叫做抛物线的标准方程. 它所表示的抛物线的焦点在x轴的正半轴上，坐标是$\left(\frac{p}{2}, 0\right)$；它的准线方程是$x=-\frac{p}{2}$，其中$p$是焦点到准线的距离(焦参数).

例1 已知抛物线的焦点是$F(3, 0)$，写出它的标准方程和准线方程.

解：因为抛物线的焦点坐标是$(3, 0)$，所以

$$\frac{p}{2}=3，得\ p=6.$$

因此，所求的抛物线标准方程是

$$y^2=12x,$$

准线方程是$x=-3$.

例2 已知抛物线的焦点在x轴的正半轴上，焦点到准线的距离是3，求抛物线的标准方程以及焦点坐标和准线方程.

解：由已知，得$p=3$. 因此，所求的抛物线标准方程是

$$y^2=6x,$$

焦点坐标是$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$，准线方程是$x=-\frac{3}{2}$.

练习A

1. 根据下列条件，写出抛物线的标准方程：

   (1) 焦点是$F(2, 0)$；

   (2) 准线方程是$x=-\frac{3}{2}$.

2. 写出下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

   (1) $y^2=10x$；　　(2) $y^2=ax$ $(a>0)$.

3. 求焦点在 x 轴正半轴上，并且经过点 $P(2, -4)$ 的抛物线的标准方程.
4. 已知抛物线的焦点在 x 轴正半轴上，且准线与 y 轴之间的距离为 6. 求此抛物线的标准方程.

练习B

1. 已知点 M 与点 $F(4, 0)$ 的距离比它到直线 l：$x+6=0$ 的距离小 2，求点 M 的轨迹方程.
2. 已知抛物线 $y^2=6x$ 和点 $A(4, 0)$. 质点 M 在此抛物线上运动，求点 M 与点 A 的距离的最小值，并指出此点 M 的坐标.

2.3.2 抛物线的几何性质

我们根据抛物线的标准方程

$$y^2=2px\ (p>0), \tag{①}$$

来研究它的一些几何性质.

1. 范围

因为 $p>0$，由方程①可知，这条抛物线上任意一点 M 的坐标 (x, y) 满足不等式 $x\geqslant 0$，所以这条抛物线在 y 轴的右侧；当 x 的值增大时，$|y|$ 的值也增大，这说明抛物线向右上方和右下方无限延伸，它开口向右.

2. 对称性

以 $-y$ 代 y，方程①不变，所以这条抛物线是以 x 轴为对称轴的轴对称图形. 抛物线的对称轴叫做**抛物线的轴**.

3. 顶点

抛物线和它的轴的交点叫做**抛物线的顶点**. 在方程①中，当 $y=0$ 时，$x=0$，所以这条抛物线的顶点就是坐标原点.

4. 离心率

抛物线上的点到焦点和准线的距离的比，叫做**抛物线的离心率**，用 e 表示. 按抛物线

的定义，$e=1$.

例1　已知抛物线以 x 轴为轴，顶点是坐标原点且开口向右，又抛物线经过点 $P(4,\ 2\sqrt{3})$，求它的标准方程，并用描点法画出图形.

解：根据已知条件，可设抛物线的方程为

$$y^2=2px\ (p>0).$$

因为点 $P(4,\ 2\sqrt{3})$在抛物线上，所以

$$(2\sqrt{3})^2=2p\cdot 4,$$

得

$$2p=3.$$

因此，所求方程为

$$y^2=3x.$$

将抛物线方程变形为 $y=\pm\sqrt{3x}$，根据 $y=\sqrt{3x}$求出抛物线在 $x\geqslant 0$ 的范围内的几个点的坐标，得

x	0	0.75	1	2	3	4	…
y	0	1.5	1.7	2.4	3	3.5	…

描点连线画出抛物线在 x 轴上方的一部分；再利用对称性，画出抛物线在 x 轴下方的另一部分. 抛物线如图2-22所示.

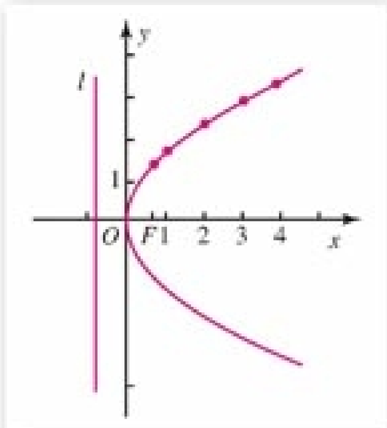


图 2-22

例2　如图 2-23(1)，汽车前灯反射镜与轴截面的交线是抛物线的一部分，灯口所在的圆面与反射镜的轴垂直，灯泡位于抛物线焦点处. 已知灯口的直径是 24 cm，灯深10 cm，那么灯泡与反射镜的顶点(即截得抛物线的顶点)距离是多少？

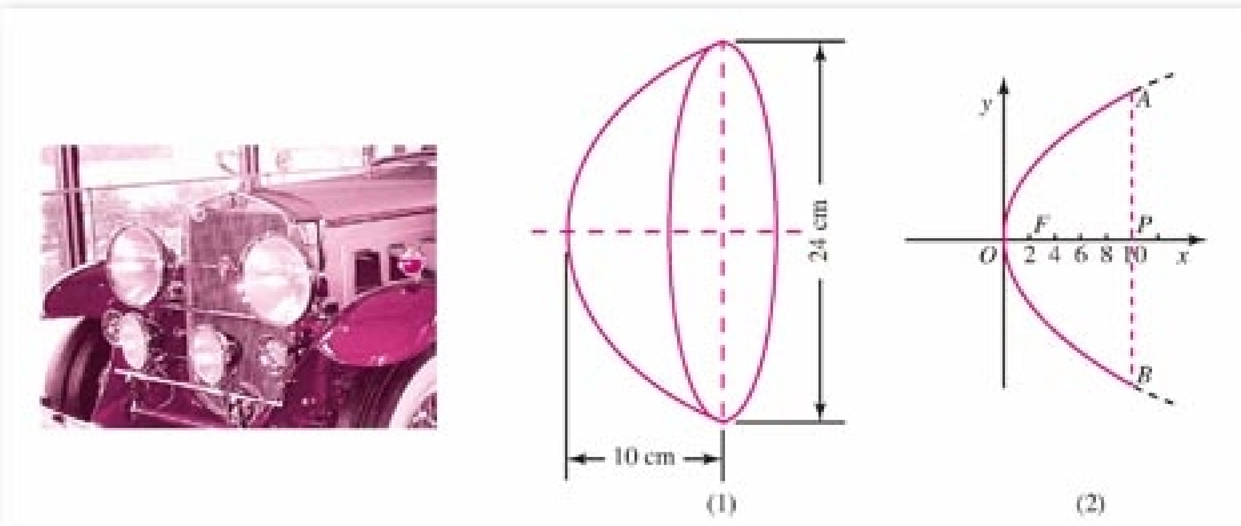


图 2-23

解：取反射镜的轴即抛物线的轴为 x 轴，抛物线的顶点为坐标原点，建立直角坐标系 xOy，如图 2-23(2)所示.

因为灯口直径 $|AB|=24$，灯深 $|OP|=10$，所以点 A 的坐标是 $(10, 12)$.

设抛物线的方程为

$$y^2=2px\ (p>0),$$

由点 $A(10, 12)$ 在抛物线上，得

$$12^2=2p\times 10,$$

所以

$$p=7.2,$$

抛物线的焦点 F 为 $(3.6, 0)$.

所以灯泡与反射镜顶点的距离是 3.6 cm.

练习A

1. 在同一直角坐标系中画出下列抛物线的图形：

(1) $y^2=\frac{1}{4}x$；　　(2) $y^2=x$；　　(3) $y^2=4x$.

再比较这些图形，说明抛物线开口的大小与方程中 x 的系数有怎样的关系？

2. 已知正三角形 AOB 的顶点 A，B 在抛物线 $y^2=6x$ 上，O 是坐标原点．求 $\triangle AOB$ 的边长.

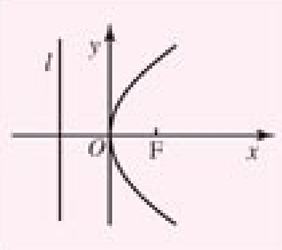
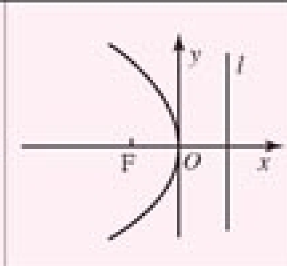
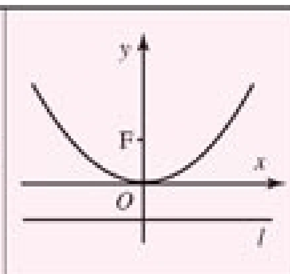
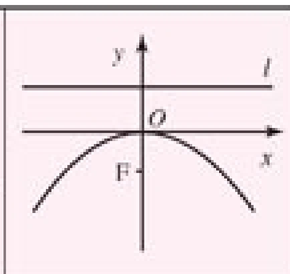
练习B

1. 垂直于 x 轴的直线与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A，B 两点，且 $|AB|=4\sqrt{3}$．求直线 AB 的方程.

2. 过抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点的一条直线与它交于 P，Q 两点，过点 P 和此抛物线顶点的直线与准线交于点 M．求证：直线 MQ 平行于此抛物线的对称轴.

在直角坐标平面上，顶点在原点、轴与坐标轴重合的抛物线有四种位置情况，因此抛物线的方程相应地有四种形式，它们都叫做**抛物线的标准方程**.

设抛物线的焦参数为 $p(p>0)$，抛物线的标准方程的四种形式列表如下：

图形				
标准方程	$y^2=2px$ $(p>0)$	$y^2=-2px$ $(p>0)$	$x^2=2py$ $(p>0)$	$x^2=-2py$ $(p>0)$
对称轴	x 轴		y 轴	
顶点	原点			
焦点坐标	$\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$	$\left(-\frac{p}{2},\ 0\right)$	$\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$	$\left(0,\ -\frac{p}{2}\right)$
准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$

例 3　求下列抛物线的焦点坐标和准线方程，并指出它们的开口方向：

(1) $y^2=-14x$；　　(2) $5x^2-2y=0$；　　(3) $y=ax^2$ $(a\neq 0)$.

解：(1) 焦点坐标是$\left(-\frac{7}{2},\ 0\right)$，准线方程是 $x=\frac{7}{2}$，抛物线开口向左.

(2) 把抛物线方程 $5x^2-2y=0$ 化成标准方程

$$x^2=\frac{2}{5}y.$$

所以焦点坐标是$\left(0,\ \frac{1}{10}\right)$，准线方程是 $y=-\frac{1}{10}$，抛物线开口向上.

(3) 把抛物线方程 $y=ax^2$ 化成标准方程

$$x^2=\frac{1}{a}y.$$

当 $a>0$ 时，焦点坐标是$\left(0,\ \frac{1}{4a}\right)$，准线方程是 $y=-\frac{1}{4a}$，抛物线开口向上；

当 $a<0$ 时，焦点坐标是$\left(0,\ \frac{1}{4a}\right)$，准线方程是 $y=-\frac{1}{4a}$，抛物线开口向下.

例 4　求以坐标原点为顶点、坐标轴为轴且经过点 $P(-2,\ -4)$ 的抛物线的方程.

分析：由已知抛物线的顶点和轴的位置，可把抛物线的方程设为标准方程形式. 但抛物线的轴可能是 x 轴，也可能是 y 轴；注意到点 $P(-2,\ -4)$ 在第三象限内，所以抛物线有开口向左和向下两种情况.

解：(1) 如果抛物线的轴为 x 轴且开口向左，那么设抛物线的方程为

$$y^2=-2px(p>0).$$

因为点 $P(-2,\ -4)$ 在抛物线上，所以

$$(-4)^2=-2p\cdot(-2),$$

得 $$p=4.$$

因此，所求的抛物线方程是 $y^2=-8x$，图形如图 2-24 中的抛物线Ⅰ.

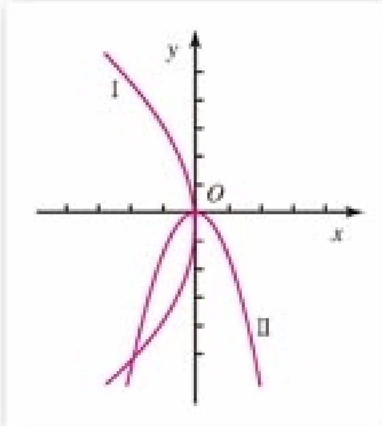


图 2-24

（2）如果抛物线的轴为 y 轴且开口向下，那么设抛物线的方程为

$$x^2=-2py\ (p>0).$$

因为点 $P(-2,\ -4)$在抛物线上，所以

$$(-2)^2=-2p\cdot(-4),$$

得 $$p=\frac{1}{2}.$$

因此，所求的抛物线方程是 $x^2=-y$，图形如图 2-24 中的抛物线Ⅱ.

应该指出，本例中抛物线的对称轴可能是 x 轴，也可能是 y 轴. 当对称轴为 x 轴时，可设抛物线的方程为 $y^2=ax$，则由点$P(-2,\ -4)$在抛物线上，得 $a=-8$；当对称轴为 y 轴时，可设抛物线的方程为 $x^2=by$，则由点$P(-2,\ -4)$在抛物线上，得 $b=-1$，这样探求抛物线方程的过程比较简便.

练习A

1. 写出下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

（1）$y^2=\frac{x}{2}$；　　（2）$x^2=4y$；

（3）$x^2=-12y$；　　（4）$y^2=-8x$.

2. 写出适合下列条件的抛物线方程：

（1）顶点在原点，准线方程为 $y=-4$；

（2）顶点在原点，准线方程为 $x=2$；

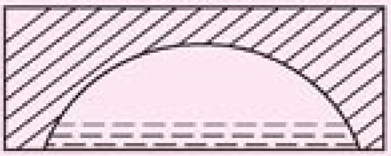
（3）顶点在原点，焦点为 $F(0,\ -3)$；

（4）顶点在原点，对称轴为 y 轴，过点 $A(3,\ -9)$.

3. 已知抛物线的顶点在原点，焦点在 y 轴上，抛物线上一点 $P(m,\ -3)$到焦点的距离等于 5，求 m 的值，并写出抛物线的方程、准线方程及焦点坐标.

练习B

1. 已知 P 是抛物线 $y^2=10x$ 上的动点，求点 P 与点 $M(m, 0)$ 的距离的最小值（其中 $m\in\mathbf{R}$）.
2. 如图是一座抛物线型拱桥示意图，桥拱是抛物线部分且以抛物线的轴为对称轴．已知顶点距水面 4 m 时，量得水面宽为 12 m，那么当水位升高 1 m 时水面的宽为多少（精确到 0.1 m）?



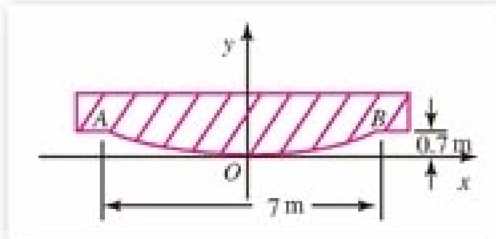
（第2题）

习题2-3　A

1. 根据下列条件，求抛物线的方程：
   (1) 顶点在原点，对称轴为 x 轴，且过点 $A(2, -4)$；
   (2) 顶点在原点，对称轴为坐标轴，且过点 $B(4, 2)$.
2. 一个动点到点 $F(0, -4)$ 的距离比到直线 $y-3=0$ 的距离多 1，求这个动点的轨迹方程.
3. 求下列方程表示的抛物线的焦点坐标和准线方程：
   (1) $y^2-6x=0$；　　(2) $x^2+10y=0$；
   (3) $y=\dfrac{3}{8}x^2$；　　(4) $ax+y^2=0$ $(a\neq 0)$.
4. 抛物线 $y^2=-12x$ 上的一点 P 和焦点 F 的距离等于 9，求点 P 的坐标.
5. 抛物线的顶点是双曲线 $12x^2-9y^2=144$ 的中心，而焦点是这双曲线的左顶点，求抛物线的方程.
6. 已知抛物线的对称轴是 y 轴，且它经过直线 $x+y=0$ 与圆 $x^2+y^2+4y=0$ 的交点，求此抛物线的方程.
7. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，作斜率等于 -2 的直线交抛物线于 A，B 两点，求 A，B 两点的距离.
8. 已知抛物线 $y^2=8x$，过点 $P(1, -1)$ 的直线交抛物线于 A，B 两点．如果点 P 恰是线段 AB 的中点，求直线 AB 的方程.

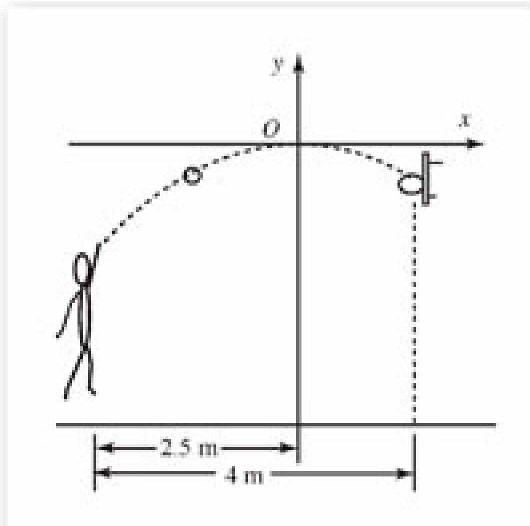
习题 2-3 B

1. 动点 M 到点 $F(0, 2)$和到直线 $y=4$ 的距离相等，求动点 M 的轨迹方程.
2. 设抛物线 $y^2=8x$ 的准线与 x 轴交于点 M，如果过点 M 的直线 l 与抛物线有公共点，求直线 l 的斜率的取值范围.
3. 已知吊车梁的鱼腹部 AOB 是一段抛物线，它的宽为 7 m，高为 0.7 m. 如图建立直角坐标系，求鱼腹部 AOB 所在抛物线的方程.



(第 3 题)

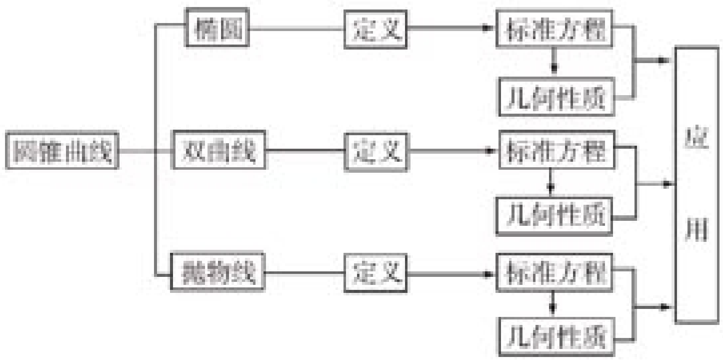
4. 已知抛物线的顶点在原点，焦点在 x 轴上，它截直线 $y=2x+1$ 所得的线段长为 $\sqrt{15}$，求此抛物线的方程.
5. 已知抛物线 $y^2=4x$，P 是抛物线上一点.
   (1) 设 F 为焦点，一个定点为 $A(6, 3)$，求 $|PA|+|PF|$ 的最小值，并指出此时点 P 的坐标；
   (2) 设点 M 的坐标为$(m, 0)$，$m>0$，求 $|PM|$ 的最小值(用 m 表示)，并指出此时点 P 的坐标.
6. 如图，一位运动员在距离球篮下 4 m 远处跳起投篮，球运行的路线是抛物线. 当球运行的水平距离为2.5 m时，达到最大高度为 3.5 m，然后准确落下篮圈. 已知篮圈中心到地面的距离为 3.05 m. 如图所示建立平面直角坐标系.
   (1) 试求球运行路线所在抛物线的方程；
   (2) 球出手时，球离开地面的高度是多少？



(第 6 题)

本章小结

Ⅰ 知识结构



Ⅱ 思考与交流

1. 椭圆、双曲线、抛物线是现实世界中物体运动的基本形式．从数学的角度来说，这些曲线分别是满足某些条件的点的集合(或轨迹)，我们用“坐标法”对它们进行了初步的研究．试用列表方法对椭圆、双曲线、抛物线的定义、标准方程、图形特征、简单性质进行归纳整理，再作比较分析，把你的发现与同学进行交流．例如利用下表，对焦点在 x 轴上的椭圆、双曲线、抛物线进行整理和分析：

<table>
<tr><th></th><th>椭圆</th><th>双曲线</th><th colspan="2">抛物线</th></tr>
<tr><td>几何条件</td><td>与两个定点的距离的和等于定值</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>标准方程</td><td></td><td></td><td>$y^2=2px$
$(p>0)$</td><td>$y^2=-2px$
$(p>0)$</td></tr>
<tr><td>图形</td><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

续表

	椭圆	双曲线	抛物线	
对称轴		x 轴，实轴长 $2a$ y 轴，虚轴长 $2b$		
顶点坐标			$(0, 0)$	
焦点坐标				
渐近线方程			无	
离心率 e	$e=\frac{c}{a}$，$0<e<1$			

同样可以对焦点在 y 轴上的椭圆、双曲线、抛物线进行整理和分析.

2. 圆锥曲线的讨论中，都涉及到 a，b，c，e 四个量，它们的几何意义和数量关系各是什么？

3. 我们利用“坐标法”对直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线进行了研究. 在研究过程中你对“坐标法”有什么体会？对解析几何的本质有什么认识？

4. 椭圆、双曲线、抛物线都是圆锥曲线，它们的离心率用 e 表示，且分别有 $0<e<1$，$e>1$，$e=1$. 由此可见，离心率 e 从数量特征的角度描述了这三种不同的圆锥曲线. 试利用计算机技术和有关软件，对离心率 e 在 $(0, +\infty)$ 上逐渐增大时对应曲线的变化过程进行观察和研究，从中体会“量变到质变”的辩证观点.

III 巩固与提高

1. 选择题：

（1）已知椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上一点 M 到椭圆的一个焦点的距离等于 4，那么点 M 到另一个焦点的距离等于（　　）.

（A）1　　（B）3　　（C）6　　（D）8

（2）双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 的渐近线方程是（　　）.

（A）$4x\pm 9y=0$　　（B）$9x\pm 4y=0$

（C）$2x\pm 3y=0$　　（D）$3x\pm 2y=0$

（3）抛物线 $y^2=4ax$（$a<0$）的焦点坐标是（　　）.

（A）$(a, 0)$　　（B）$(-a, 0)$

（C）$(0, a)$　　（D）$(0, -a)$

（4）一直线过椭圆 $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$（$a>0$）的焦点 F 且垂直于 x 轴，与椭圆相交于 M，N 两点，以线段 MN 为一边、椭圆的短半轴为另一边作一个四边形，则这个四边形

一定是（ ）.

（A）等腰梯形　　（B）一般梯形

（C）菱形　　（D）平行四边形但非菱形

2. 填空题：

（1）如果椭圆的短轴长等于焦距，那么它的离心率等于________.

（2）已知椭圆的一个焦点坐标为(2，0)，过此焦点作垂直于椭圆长轴的直线，截椭圆所得的线段长为$\frac{10}{3}$，那么这个椭圆的标准方程是______________.

（3）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点为$F_1$和$F_2$，过$F_1$的直线与左支相交于$A$，$B$两点．如果$|AF_2|+|BF_2|=2|AB|$，那么$|AB|=$________.

（4）在抛物线$x^2=2y$上与点$M(0，1)$距离最近的点的坐标是________.

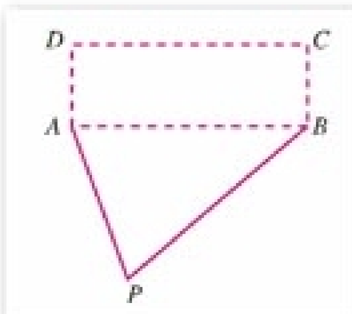
3. 求和双曲线$x^2-y^2=8$有共同焦点且经过点$P(4，6)$的椭圆的方程.

4. 已知双曲线与椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$的焦点相同，且它们的离心率之和等于$\frac{14}{5}$，求此双曲线的方程.

5. 已知点A是椭圆$x^2+2y^2=4$的长轴的左端点，以点A为直角顶点作一个内接于椭圆的等腰直角三角形ABC，求斜边BC的长.

6. 试写出椭圆的一个标准方程，此方程表示的椭圆以抛物线$y^2=8x$的顶点为中心、以其焦点为右焦点.

7. 如图，某公园要修建一个表面为矩形$ABCD$的水池，挖出的泥土只能沿着AP或BP所示路线运送到P处．已知$|AP|=100$ m，$|BP|=150$ m，$|AB|=140$ m，试问怎样运土才能最省人工(考虑使运土所走过的路尽可能短)?



（第7题）

Ⅳ 自测与评估

1. 填空：

（1）椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的焦距等于__________.

（2）抛物线的顶点在原点，对称轴是坐标轴，且它过点$P(-2，2\sqrt{2})$，则抛物线的方程是______________.

（3）双曲线$x^2-\frac{y^2}{24}=1$的焦点坐标是__________.

（4）过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的中心任作一直线交椭圆于$P$，$Q$两点，$F$是椭圆的一个焦点，则$\triangle PFQ$的周长的最小值等于________.

2. 已知椭圆 $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ 上一点 P 与两个焦点的连线互相垂直，求点 P 的坐标.

3. 已知抛物线的顶点在原点，焦点为 $F(-3,\ 0)$，设抛物线上一点 $P(x,\ y)$与焦点 F 的距离 $d=f(x)$，求$f(x)$的表达式.

4. 已知双曲线的渐近线方程为 $3x\pm4y=0$，它的焦点是椭圆 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$ 的长轴端点，求此双曲线的方程.

5. 已知方程 $\frac{x^2}{4-k}+\frac{y^2}{9-k}=1$，讨论当 k 在什么范围取值时，这个方程表示的曲线是(1)椭圆；(2)双曲线. 再分别指出它们的焦点坐标.

6. 已知地球运行的轨道的长半轴 $a=1.50\times10^8$ km，离心率 $e=0.019\ 2$ 的椭圆，太阳在这个椭圆的一个焦点上. 求地球到太阳的最大距离和最小距离(把地球和太阳分别看成一个点).

数 学 文 化

阅读与欣赏

圆锥面与圆锥曲线

圆锥曲线是在科学研究以及生产和生活中具有广泛应用的曲线．关于圆锥曲线的基本理论，成熟于古希腊，对建立理论作出杰出贡献的是古希腊数学家阿波罗尼奥斯(Apollonius of Perga，约公元前 262—前 190)，而最先发现圆锥曲线的则是古希腊的另一位数学家梅内赫莫斯(Menaechmus)．

梅内赫莫斯是通过用垂直于母线的平面去截直角、钝角、锐角圆锥面(圆锥面的轴截面顶角分别为直角、钝角、锐角)，得到各种类型的圆锥曲线的．促成他用平面去截圆锥面而得出圆锥曲线的动因，是当时研究古希腊三大作图问题之一的倍立方问题的需要．圆锥曲线及其应用一经提出，立即受到数学界的重视，当时不仅有其他学者进行深入的研究，欧几里得(Euclid of Alexandria，约公元前 300 年)、阿基米德(Archimedes，公元前 287—前 212)等大师也为之倾注了很大的心血．阿波罗尼奥斯总结了前人的工作，尤其是与他同时代的欧几里得的工作；他不仅对前人的成果进行了归纳提炼并加以系统化，而且提出了许多自己的创见，最后编成巨著《圆锥曲线论》．这部著作与欧几里得的《几何原本》同被誉为古代希腊几何的登峰造极之作．

现在，我们从“圆锥面和一个平面的交线叫做圆锥曲线”这一角度来认识圆锥曲线．

设一条动直线 m 与一条定直线 l 相交于定点 A，直线 m 与 l 的夹角为定角 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$．直线 m 绕 l 旋转一周所生成的曲面叫做正圆锥面，简称圆锥面．直线 l 叫做圆锥面的轴，直线 m 叫做圆锥面的母线，点 A 叫做圆锥面的顶点．圆锥面被它的顶点分为向上、向下两支(图 2-25)．

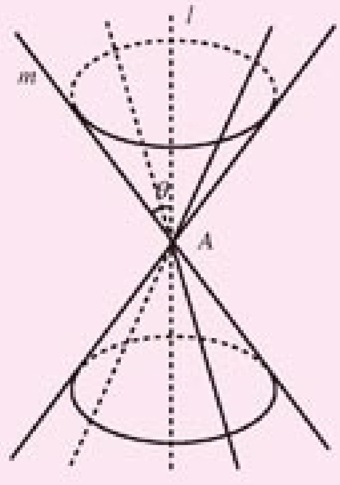


图 2-25

用一个平面去截圆锥面，所得的截线是圆锥曲线，截线的形态与截平面的位置有关．

设圆锥面 C 的轴线 l 与截平面 P 所成的角为 α，$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$．

1．如果平面 P 经过圆锥面 C 的顶点 A，那么 $A\in$ 平面 P，则 $C\cap P$ 有三种可能情况：

(1) 当 $\alpha>\theta$ 时，$C\cap P$ 只含有一个点 A；

(2) 当 $\alpha=\theta$ 时，$C\cap P$ 只含有一条母线；

(3) 当 $\alpha<\theta$ 时，$C\cap P$ 只含有两条母线．

以上三种情况是圆锥曲线的特例，都叫做退化的圆锥曲线．

2．如果平面 P 不经过圆锥面 C 的顶点 A，那么 $A\notin$ 平面 P，则 $C\cap P$ 有四种可能情况

(图 2-26)：

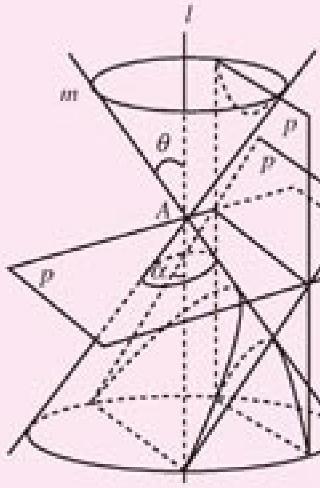


图 2-26

(1) 当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，$C\cap P$ 是一个圆；

(2) 当 $\frac{\pi}{2}>\alpha>\theta$ 时，$C\cap P$ 叫做椭圆；

(3) 当 $\alpha=\theta$ 时，$C\cap P$ 叫做抛物线；

(4) $0\leqslant\alpha<\theta$ 时，$C\cap P$ 叫做双曲线（这时平面 P 与圆锥面 C 的两支都相交，形成双曲线的两支）.

阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》问世后的十几个世纪里，整个数学界对圆锥曲线的研究一直没有新的进展和重大突破. 直到 16 世纪，由于德国天文学家开普勒(Johannes Kepler，1571—1630)揭示出行星按椭圆轨道环绕太阳运行的事实，意大利物理学家伽利略(Galileo Galilei，1564—1642)得出物体斜抛运动的轨道是抛物线，促使人们对圆锥曲线做进一步研究，对圆锥曲线的处理方法开始有了变化. 进入 17 世纪，开普勒对圆锥曲线的性质作了新的阐述，他第一个指出，椭圆、抛物线、双曲线、圆以及由两条直线组成的退化圆锥曲线，都可以从其中的一个连续地变为另一个，为圆锥曲线现代的统一定义提供了一个合乎逻辑的直观基础. 随着射影几何的创立，投影和截影的方法被用于圆锥曲线的研究，法国数学家德沙格(G. Desargues，1591—1661)、帕斯卡(B. Pascal，1623—1662)和拉伊尔(P. de La Hire，1640—1718)由此得出了一些关于圆锥曲线的特殊的定理. 而当法国数学家笛卡儿(R. Deacartes，1596—1650)和费马(Pierre de Fermat，1601—1665)创立了解析几何时，人们对圆锥曲线的认识进入了一个新阶段，对圆锥曲线的研究开始朝着解析几何的方向发展. 到了 18 世纪，人们对解析几何广泛地进行探讨，表示圆锥曲线的二元二次方程也被化为几种标准形式，或者引进曲线的参数方程. 1748 年欧拉(Leonard Euler，1707—1783) 出版了《无穷小分析引论》，在这部著作中，给出了现代形式下圆锥曲线的系统阐述，并从一般二元二次方程

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+dy+f=0$$

出发，指出圆锥曲线的各种情形，经过适当的坐标变换，总可以化为以下标准形式之一：

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，椭圆；

(2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$，虚椭圆；

(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$，点(0，0)；

(4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，双曲线；

(5) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$，两条相交直线；

(6) $y^2=2px$，抛物线；

(7) $x^2=a^2$，两条平行直线；

(8) $x^2=-a^2$，两条虚平行直线；

(9) $x^2=0$，两条重合的直线.

圆锥曲线是描述天体运行轨道时常用的曲线，也是我们日常生活中常见的曲线，而且圆锥曲线的光学性质在现实生活中的应用相当普遍.

下面我们不加证明直接列出圆锥曲线的光学性质.

(1) 从椭圆的一个焦点处发出光线照射到椭圆上，经反射后都通过另一个焦点(图 2-27).

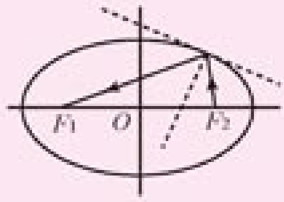


图 2-27

(2) 从双曲线的一个焦点处发出光线照射到双曲线上，经反射后会使光线散开，如同光线从另一个焦点发出来的一样(图 2-28)．

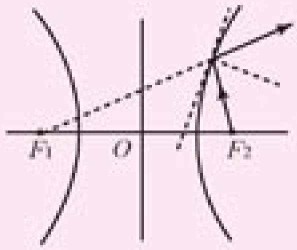


图 2-28

(3) 从抛物线焦点处发出的光线照射到抛物线上，经反射后都平行于抛物线的轴(图 2-29)；反之，平行于抛物线的轴的光线照射到抛物线上，经反射后都通过焦点(图 2-30)．

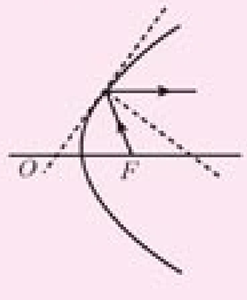


图 2-29

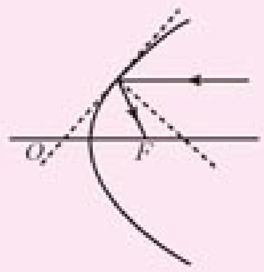


图 2-30

圆锥曲线的光学性质被人们广泛地应用于各种设计中．例如，电影放映机的聚光灯的反射镜的形状是旋转椭圆面；手电筒、探照灯、太阳灶的反光镜都是旋转抛物面．

第三章 导数及其应用

世间万物都处在不断变化之中. 认识事物的变化规律，是人类面临的重大课题. 数学关注变化着的事物内在的数量关系，特别是变量之间的函数关系. 研究函数的变化趋势不仅是现实的需要，而且有重要的理论意义. 17 世纪，数学泰斗牛顿和莱布尼兹把这种研究提高到一个新的阶段. 他们以大量的物理问题和几何问题为背景，研究了函数的平均变化率，引进了一种全新的运算——求导数，进而引进了导数的逆运算——积分. 两位巨匠开创性的工作，使前人未能解决的诸多物理问题，如变速运动的瞬时速度与路程、变力作功问题等等迎刃而解；同时使许多重大几何问题，如求曲线的切线与长度、封闭曲线形的面积、立体体积等也获得圆满解决；并创立了微积分学. 三百年来，微积分学不仅对数学，而且对整个人类文明产生了不可估量的影响.

本章导数及其应用，将把同学们引进到一个充满活力的领域. 在这里，同学们将领悟辩证的思维方式，用微观去驾驭宏观，从变量关系层面去把握事物变化的数学本质，并学会解答现实生活中的许多问题.

3.1 导　数

3.1.1 函数的平均变化率

在爬山过程中，我们都有这样的感觉：当山坡平缓时，步履轻盈；当山坡陡峭时，气喘吁吁．怎样用数学反映山坡的平缓与陡峭程度呢？让我们用函数变化的观点研讨这个问题．

假设图 3-1 是一座山的剖面示意图，并在上面建立平面直角坐标系．A 是出发点，H 是山顶．爬山路线用函数$y=f(x)$表示．

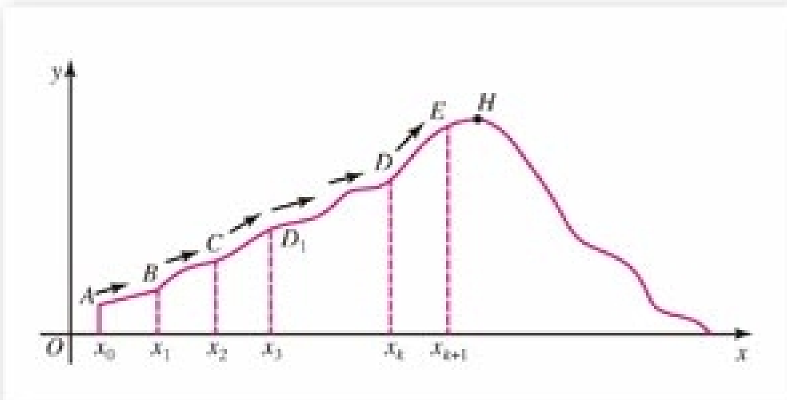


图 3-1

自变量 x 表示登山者的水平位置，函数值 $y=f(x)$表示此时登山者所在的高度．想想看，如何用数量表示山路的平缓及陡峭程度呢？

我们将图 3-1 中从 A 到 B 这一段平直的山路放大，如图 3-2．设点 A 的坐标为$(x_0,\ y_0)$，点 B 的坐标为$(x_1,\ y_1)$，自变量 x 的改变量x_1-x_0记为 Δx，函数值的改变量 y_1-y_0 记为 Δy，即

$$\Delta x=x_1-x_0,\qquad \Delta y=y_1-y_0.$$

于是，此人从点 A 爬到点 B 的位移可用向量

$$\overrightarrow{AB}=(\Delta x,\ \Delta y)$$

来表示．设向量$\overrightarrow{AB}$对 x 轴的倾角为 θ，直线 AB 的斜率为 k，则有

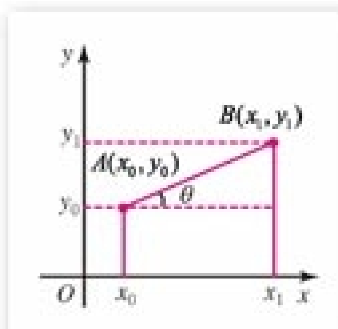


图 3-2

$$k=\tan\theta=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

从上式可以看出，当登山者移动的水平距离一定(Δx 为定值)时，垂直距离越大($|\Delta y|$越大)，则这段山路越陡峭；垂直距离不变，即$|\Delta y|=0$，则这段山路是水平的．反之亦

然. 可见比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 反映了山坡的陡峭程度.

现在的问题是登山路线是弯曲的，比如从点 C 到点 D 是一条曲线，怎样用数量刻画这段山路陡峭程度呢(图3-1)？经过前面的分析，我们已经知道可以用 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 刻画平直山路的陡峭. 一个自然的想法是将弯曲山路 CD 分成许多小段，每一小段山路可视为“平直”的. 例如，山路 CD 的一小段，可近似地看成直线段 CD_1. 于是此段山路的陡峭程度可用直线 CD_1 的斜率

> 注　改变量 Δx，Δy 分别读为“delta x”“delta y”. “改变量”有时也称作“增量”.

$$k=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

近似地来刻画.

注意：AB 段的 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 与 CD_1 段的 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 是不同的. 各段的 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 是登山高度在这段山路上的平均变化的度量. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 越大，山坡越陡，高度的平均变化量就越大. 不管是哪一小段山路，高度的平均变化可以用起点和终点的纵坐标之差与相应横坐标之差的比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$$

来度量.

由此，我们引出函数平均变化率的概念.

已知函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 及其附近有定义，令

$\Delta x=x-x_0$；

$\Delta y=y-y_0=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. ❶

> 注　❶ 这里 Δx，Δy 可为正值，也可为负值. 但 $\Delta x\neq 0$，Δy 可以为 0.

则当 $\Delta x\neq 0$ 时，比值

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

叫做函数 $y=f(x)$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的**平均变化率**.

例 1　求 $y=x^2$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率.

解：当自变量从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数的平均变化率为

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x.$$

当 Δx 取定值，x_0 取不同的数值时，该函数的平均变化率也不一样. 例如 x_0 取正值，并不断增大时，该函数的平均变化率也不断的增大，曲线变得越来越“陡”. 这可以从图 3-3 直接看出来.

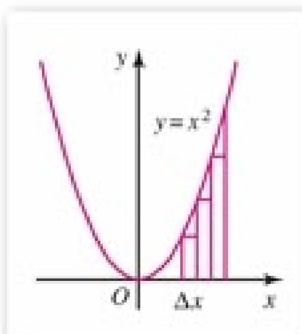


图 3-3

例 2 求 $y=\frac{1}{x}$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率($x_0\neq 0$).

解：当自变量从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数的平均变化率为

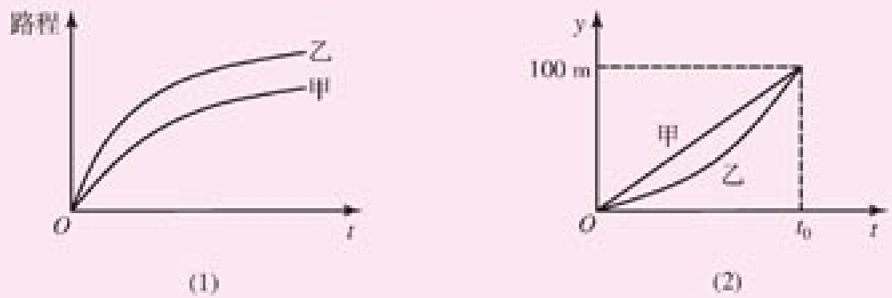
$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}=-\frac{1}{(x_0+\Delta x)x_0}.$$

思考与讨论

画出反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象，从例 2 所得该函数在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率表达式，你能说出这函数的平均变化率与它的图象之间的关系吗？

练习A

1. 甲、乙二人跑步路程与时间关系以及百米赛跑路程和时间关系分别如图(1)(2)所示，试问：
(1) 甲、乙二人哪一个跑得快？
(2) 甲、乙二人百米赛跑，问快到终点时，谁跑得较快？



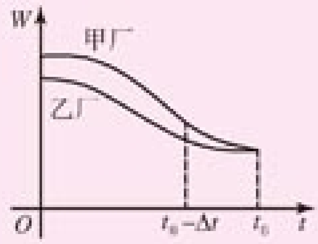
(第 1 题)

2. 求函数 $y=x^2$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率，并计算当 $x_0=1, 2, 3$，$\Delta x=\frac{1}{3}$ 时平均变化率的值，哪个平均变化率最大、最小？并画图表示.

3. 求 $y=x^2-2x+3$ 在 2 到 $\frac{9}{4}$ 之间的平均变化率.

练习B

1. 两工厂经过治理，污水的排放流量(W)与时间(t)的关系，如图所示．试指出哪一个厂治污效果较好？



（第1题）

2. 试比较正弦函数 $y=\sin x$ 在 0 到 $\frac{\pi}{6}$ 之间和 $\frac{\pi}{3}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间的平均变化率，哪一个较大？

3.1.2 瞬时速度与导数

物体作匀速直线运动，速度是路程与时间之比：$v=\frac{s}{t}$．如果物体作变速直线运动，其速度如何刻画呢？例如自由落体、垂直向上发射火箭都是变速直线运动．这类运动，路程随时间变化，速度也随时间变化．那么，速度与路程、时间有什么样的关系呢？

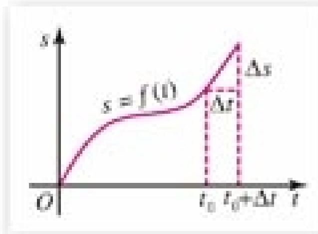


图 3-4

设物体运动路程与时间的关系是 $s=f(t)$．从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内，物体运动的平均速度是

$$v_0=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}=\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

可见平均速度就是 $f(t)$在 t_0 到 $t_0+\Delta x$ 之间的平均变化率．那么在某一时刻 t_0 运动的速度(瞬时速度)是什么呢？我们从平均速度出发讨论这个问题．

当 $|\Delta t|$ 取一系列越来越小的值时，平均速度 v_0 取一系列数值，这一系列数值有什么特点呢？我们以跳水运动为例来分析这个问题．

设在 10 米跳台上，运动员跳离跳台时垂直向上的速度为6.5 m/s．运动员在时刻 t 距离水面的高度

$$h(t)=10-\frac{1}{2}gt^2+6.5t,$$

其中 g 为重力加速度，$g\approx 9.8\ \text{m/s}^2$．于是

$$h(t)=10-4.9t^2+6.5t.$$

以下我们来探讨运动员在 $t=2$ s 时的(瞬时)速度．

首先算出，该运动员在 2 s 至 2.1 s（记为

注

跳水是匀加速运动，匀加速运动的运动方程是

$$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2,$$

其中 v_0 为初始速度，a 为重力加速度，t 为运动时间．

在跳水的每一时刻 t，初速度是向上的，重力加速度是向下的．起跳后，t s时运动员离水面的高度是

$$h(t)=10-\left(\frac{1}{2}gt^2-6.5t\right).$$

[2, 2.1])这段时间内的平均速度

$$\frac{h(2.1)-h(2)}{2.1-2}=\frac{2.041-3.4}{0.1}=-13.59.$$

然后运用计算器可以计算出一系列关于时间改变量 Δt 的平均速度，如下表：

时间区间(s)	时间改变量 Δt	平均速度(m/s)
[2, 2.1]	0.1	−13.59
[2, 2.01]	0.01	−13.149
[2, 2.001]	0.001	−13.104 9
[2, 2.000 1]	0.000 1	−13.100 49
[2, 2.000 01]	0.000 01	−13.100 049
……	……	……

同样，在时间段 [1.9, 2] 内，也可计算出一系列关于时间改变量 Δt 的平均速度，如下表：

时间区间(s)	时间改变量 Δt	平均速度(m/s)
[1.9, 2]	−0.1	−12.61
[1.99, 2]	−0.01	−13.051
[1.999, 2]	−0.001	−13.095 1
[1.999 9, 2]	−0.000 1	−13.099 51
[1.999 99, 2]	−0.000 01	−13.099 951
……	……	……

由此表看出，当时间间隔越来越小时，平均速度趋于常数−13.1，这个常数可视为该运动员在 2 s 时的瞬时速度：

$$v(2)=-13.1(\mathrm{m/s}).$$

这里“−”号表示运动员在这个时刻垂直向下运动.

注

Δt 趋近于 0 是指变化着的 Δt 与 0 距离要多小有多小，即 $|\Delta t|$ 要多小有多小，但 $\Delta t\neq 0$. 常用 $\Delta t\to 0$ 表示.

我们把上述关于 2 s 时的瞬时速度用平均变化率的变化趋势描述如下：

当 Δt 趋近于 0 时，$\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}$趋近于−13.1.

实际上，我们也可以直接由 $\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}$ 看出其变化趋势：

$$\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}$$

$$=\frac{[10-4.9(2+\Delta t)^2+6.5(2+\Delta t)]-[10-4.9\times 2^2+6.5\times 2]}{\Delta t}$$

$$=\frac{-4\times4.9\Delta t-4.9\Delta t^2+6.5\Delta t}{\Delta t}$$
$$=-13.1-4.9\Delta t.$$

当 Δt 趋近于 0 时，上式右端趋近于常数 -13.1. 这和取具体值计算的结果一致.

一般地，对任一时刻 t_0，也可以计算出瞬时速度：

$$\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t}$$
$$=\frac{[10-4.9(t_0+\Delta t)^2+6.5(t_0+\Delta t)]-[10-4.9t_0^2+6.5t_0]}{\Delta t}$$
$$=\frac{-2\times4.9t_0\cdot\Delta t-4.9(\Delta t)^2+6.5\Delta t}{\Delta t}$$
$$=-9.8t_0+6.5-4.9\Delta t. \qquad (*)$$

当 Δt 趋近于 0 时，上式右边趋近于 $-9.8t_0+6.5$.

这就是说，在时刻 t_0，运动员的速度是 $(-9.8t_0+6.5)$ m/s.

以上分析表明，函数 $h(t)$ 在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 之间的平均变化率

$$\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t},$$

当 Δt 趋近于 0 时，趋于常数

$$-9.8t_0+6.5,$$

我们把它称为 t_0 时刻的**瞬时速度**.

这时，有人可能要问，常数 $-9.8t_0+6.5$ 可在上面 $(*)$ 式的最后结果中，令 $\Delta t=0$ 而得到. 为什么要用“趋近于 0”来表述？现在还很难给你一个满意的回答. 这里，先说明两点：

(1) 在上面的例子中，我们研究的是平均速度在趋向于某一时刻的变化过程，在这个变化过程中，时间间隔 Δt 越来越短，能越过任意小的时间间隔，但始终不能为 0，不然，我们就得不到平均变化率的值.

(2) 当 Δt 趋近于 0 时，存在一个数 l 与商 $\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t}$ 无限地接近.

应注意，我们这里研究的问题与以前学过的数学有质的不同. 这里研究的是两个变量 Δy 与 Δx 比值变化的性态. 尽管 Δx，Δy 在变化中都趋近于 0，但是它们的比值却趋于一个确定的常数.

由以上分析，我们给出函数瞬时变化率的概念.

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 附近有定义，当自变量在 $x=x_0$ 附近改变 Δx 时，函数值相应地改变

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

如果当 Δx 趋近于 0 时，平均变化率

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

趋近于一个常数 l，则数 l 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的**瞬时变化率**. 可用趋近于符号“$\rightarrow$”

记作

$$\text{当 } \Delta x \to 0 \text{ 时，} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \to l.$$

这时，还可以说：当 $\Delta x \to 0$ 时，函数平均变化率的极限等于函数在 x_0 的瞬时变化率 l．记作

> **注** "极限"一词用符号"lim"表示．读为"limit"．

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=l.$$

函数在 x_0 的瞬时变化率，通常就定义为 $f(x)$在 $x=x_0$ 处的**导数**．并记作

$$f'(x_0) \text{或 } y'|_{x=x_0}.$$

于是可写作

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).}$$

这样一来，变速运动在 t_0 的瞬时速度就是路程函数 $y=s(t)$ 在 t_0 的导数．

如果 $f(x)$在开区间(a, b)内每一点 x 导数都存在，则称 $f(x)$在区间(a, b)可导．这样，对开区间(a, b)内每个值 x，都对应一个确定的导数$f'(x)$，于是在区间(a, b)内 $f'(x)$构成一个新的函数，我们把这个函数称为函数$y=f(x)$的**导函数**．记为

$$f'(x) \text{（或 } y'_x\text{、}y'\text{）}.$$

导函数通常简称为**导数**．今后，如不特别指明求某一点的导数，求导数指的就是求导函数．

例 竖直向上弹射一个小球，小球的初速度为100 m/s．试求小球何时速度为 0．

解：小球的运动方程为

$$h(t)=100t-\frac{1}{2}gt^2,$$

小球向上位移是初速度引起的位移$(100t)$与重力引起的位移$\left(-\frac{1}{2}gt^2\right)$的合成．

在 t 附近的平均变化率为

$$\frac{\left[100(t+\Delta t)-\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2\right]-\left[100t-\frac{1}{2}gt^2\right]}{\Delta t}$$

$$=\frac{100\Delta t-g\cdot t\cdot\Delta t-\frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$=100-gt-\frac{1}{2}g\Delta t.$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，上式趋近于 $100-gt$❶．可见 t 时刻的瞬时速度

> **注** ❶ $\Delta t \to 0$ 时，Δt 乘上任何常数仍然趋近于 0．

$$h'(t)=100-gt.$$

令 $$h'(t)=100-gt=0,$$

解得 $t=\frac{100}{g}\approx\frac{100}{9.8}\approx 10.2\text{(s)}.$

因此小球被弹射后约 10.2 s 后速度变为 0.

思考与讨论

小球速度变为 0，意味着什么？你能计算出此小球上升的最大高度吗？

探索与研究

研究圆面积与圆周长的关系.

我们知道，圆面积 S 是半径 r 的函数 $S=\pi r^2$，圆周长 l 也是圆半径 r 的函数 $l=2\pi r$.

利用导数的定义，一步步地求 S 对半径 r 的导数，说出每一步的几何意义．它与圆周长有什么关系？

类似地讨论球的体积与球面积公式的关系．由此，写一篇小论文，谈谈你对导数概念的体会.

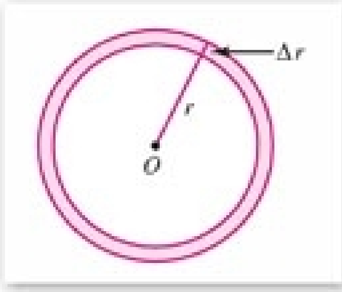


图 3-5

练习A

1. 设一物体的运动方程是

$$s(t)=v_0t+\frac{1}{2}at^2.$$

其中 v_0 为初速度，a 是加速度，时间单位为 s，求 $t=2$ s 的瞬时速度.

2. 求函数 $y=ax+b$ 的瞬时变化率.

3. 如果一个函数的瞬时变化率处处为 0，这个函数是什么函数？

练习B

1. 求函数 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x=1$，2 处的瞬时变化率.

2. 画出 $y=|x|$ 的图象．计算在 $-\frac{1}{3}$ 到 0 之间和 0 到 $\frac{1}{3}$ 之间的平均变化率，并探讨在 $x=0$ 处的瞬时变化率(导数).

3.1.3 导数的几何意义

设函数 $y=f(x)$ 的图象如图 3-6 所示. AB 是过点 $A(x_0, f(x_0))$ 与点 $B(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ 的一条割线. 此割线的斜率是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

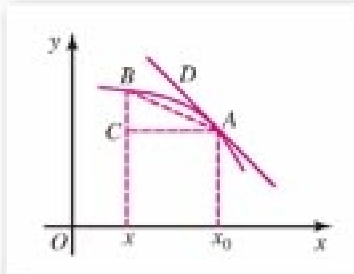


图 3-6

可见曲线割线的斜率就是函数的平均变化率. 当点 B 沿曲线趋近于点 A 时，割线 AB 绕点 A 转动，它的极限位置为直线 AD，这条直线 AD 叫做此曲线在点 A 处的切线. 于是，当 $\Delta x\to 0$ 时，割线 AB 的斜率趋向于在点 A 的切线 AD 的斜率，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\text{切线 } AD \text{ 的斜率}.$$

由导数意义可知，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线的斜率等于 $f'(x_0)$.

例 1 求抛物线 $y=x^2$ 在点 $(1, 1)$ 切线的斜率.

解：在点 $(1, 1)$ 切线的斜率是

$$\begin{aligned} f'(1)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2. \end{aligned}$$

因此，抛物线 $y=x^2$ 在点 $(1, 1)$ 处切线的斜率为 2.

例 2 求双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ 的切线方程.

解：因为
$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2+\Delta x}-\frac{1}{2}}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{1}{2(2+\Delta x)}\\ &=-\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

所以，这条双曲线在点 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ 的切线的斜率为 $-\frac{1}{4}$.

由直线方程的点斜式，得切线方程为

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-2),$$

即 $\quad y=-\frac{1}{4}x+1.$

例 3 求抛物线 $y=x^2$ 过点 $\left(\frac{5}{2}, 6\right)$ 的切线方程.

解：设此切线过抛物线上的点(x_0, x_0^2)．由例1及导数的意义知此切线的斜率为$2x_0$．又因为此切线过点$\left(\frac{5}{2}, 6\right)$和点$(x_0, x_0^2)$，其斜率应满足

$$\frac{x_0^2-6}{x_0-\frac{5}{2}}=2x_0,$$

由此x_0应满足

$$x_0^2-5x_0+6=0.$$

解得$x_0=2, 3$．即切线过抛物线$y=x^2$上的点$(2, 4)$，$(3, 9)$．所以切线方程分别为

$$y-4=4(x-2),$$
$$y-9=6(x-3).$$

化简得

$$y=4x-4,$$
$$y=6x-9.$$

此即所求的切线方程．

练习A

1. 已知$y=x^2$，分别求出在$x=0.3, 1, 3, 8$处切线的斜率．
2. 求下列曲线在给定点切线的斜率：

   (1) $y=2x^2$，　$(1, 2)$；　(2) $y=x^2+1$，　$(1, 2)$；

   (3) $y=3x-5$，　$(2, 1)$；　(4) $y=x^3$，　$(1, 1)$；

   (5) $y=\frac{1}{x}$，　$(1, 1)$；　(6) $y=x^2+1$，　$(-1, 2)$．
3. 求下列曲线在给定点的切线方程：

   (1) $y=x^2$，　$x=2$；　(2) $y=x^3$，　$x=\frac{1}{2}$．

练习B

1. 已知曲线$y=x^2-1$和其上一点，这点的横坐标为-1，求曲线在这点的切线方程．
2. 已知曲线$y=x^3-2x$和其上一点，这点的横坐标为2，求曲线在这点的切线方程．
3. 设(x_0, y_0)是抛物线$y=x^2+3x+4$上一点，求在(x_0, y_0)的切线方程．

习题 3-1 A

1. 已知质点按规律 $s=2t^2+4t$（距离单位：m，时间单位：s）运动，求：

(1) 质点开始运动后 3 s 内的平均速度；

(2) 质点在 2 s 到 3 s 内的平均速度；

(3) 质点在 3 s 时的瞬时速度.

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=ax+b$；　　(2) $y=\dfrac{1}{x+2}$.

3. 已知 $f(x)=(x-1)^2$，求 $f'(x)$，$f'(0)$，$f'(2)$.

4. 求曲线 $y=2x-x^3$ 在点$(-1, -1)$处切线的倾角.

习题 3-1 B

1. 函数 $y=f(x)$的导函数与在 x_0 处的导数有什么区别？有什么联系？

2. 商 $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 与 x 有关吗？当 $\Delta x\to 0$ 时，x 是否改变？

3. 求下列函数的导数：(1) $y=2x^3$；　(2) $y=x^3-x$.

4. 求抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 过点$\left(4, \dfrac{7}{4}\right)$的切线方程(注意此点不在抛物线上).

3.2 导数的运算

3.2.1 常数与幂函数的导数

（1）常数函数的导数

设 $y=f(x)\equiv C$，C 是常数.

$$C'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0.$$

即　　$C'=0$.

（2）函数 $y=x$ 的导数

设 $y=f(x)=x$.

$$x'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=1.$$

即　　$x'=1$.

（3）函数 $y=x^2$ 的导数

设 $y=f(x)=x^2$.

$$\begin{aligned}(x^2)'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.\end{aligned}$$

即　　$(x^2)'=2x$.

（4）函数 $y=\frac{1}{x}$ 的导数

设 $y=f(x)=\frac{1}{x}$，$x\neq 0$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}\right)'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}\right)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{1}{x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

即　　$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，$(x\neq 0)$.

以上根据定义，我们导出了四个函数的求导公式. 配合下边将要学习的导数公式表和导数运算法则，我们就可以求出一些简单函数的导数了.

练习A

1. 试说明 $c'=0$ 及 $x'=1$ 的几何意义.
2. 求函数 $y=x^{-1}$，在 $x=2$ 处的导数.
3. 求抛物线 $y=x^2$，在点(2，4)的切线方程.

练习B

1. 求函数 $f(x)=\pi$ 的导数.
2. 求抛物线 $y=x^2$ 在 $x=1$ 与 $x=2$ 处的切线方程.

3.2.2 导数公式表

1. 基本初等函数导数公式表

由于在科学研究和工程计算中，经常要使用一些初等函数的导数，为了方便并减少重复的劳动，数学工作者早已制作出常用函数的求导公式表，供大家使用. 这里仅列出基本初等函数的求导公式表，供同学们做练习时查用.

注 $\ln a=\log_e a$，称作 a 的自然对数，其底为 e，e 是一个和 π 一样重要的无理数.

$e=2.718\,281\,828\,4\cdots$.

基本初等函数的导数公式表

$y=f(x)$	$y'=f'(x)$
$y=C$	$y'=0$
$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$，n 为自然数
$y=x^\mu$ $(x>0，\mu\neq 0)$	$y'=\mu x^{\mu-1}$，μ 为有理数
$y=a^x$ $(a>0，a\neq 1)$	$y'=a^x\ln a$
$y=e^x$	$y'=e^x$
$y=\log_a x$ $(a>0，a\neq 1，x>0)$	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$

续表

$y=f(x)$	$y'=f'(x)$
$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$

2. 数学软件的应用(选学)

查表求函数的导数，现在科研人员甚至大学生都很少使用了．由于计算机性能的提高和广泛普及，大家已使用数学应用软件进行导数的计算．再复杂的函数，使用数学软件进行计算，只是瞬间的事．现在广泛使用的数学软件很多，如 Maple，Matlab，Mathcad，…等．下面举例说明．

例 求下列函数的导数：

$f(x)=x^5+2x^4+x^3$；$g(x)=3^x+\ln x$；$h(x)=\cos x+\sin x$．

解：启动 Maple，在界面内输入

```
> diff(x^5+2*x^4+x^3, x);
```

$$5x^4+8x^3+3x^2$$

```
> diff(3^x+ln(x), x);
```

$$3^x\ln(3)+\frac{1}{x}$$

```
> diff(cos(x)+sin(x), x);
```

$$-\sin(x)+\cos(x)$$

即
$$f'(x)=5x^4+8x^3+3x^2;$$
$$g'(x)=3^x\ln 3+\frac{1}{x};$$
$$h'(x)=-\sin x+\cos x.$$

练习A

1. 求下列函数的导数：

$y=x^5$，　$y=x^{12}$，　$y=x^{-3}$，　$y=x^{0.3}$，　$y=x^{108}$．

2. 求下列函数的导数：

$y=\cos x$，　$y=\sin x$，　$y=2^x$，　$y=\ln x$，　$y=e^x$．

3. 求曲线 $y=x^5$ 在点$(1, 1)$处的切线方程．

练习B

1. 求下列函数在给定点的导数：

(1) $y=x^{\frac{1}{4}}$，　$x=16$；　　　(2) $y=\sin x$，　$x=\frac{\pi}{2}$；

(3) $y=\cos x$，　$x=2\pi$.

2. 求余弦曲线 $y=\cos x$ 在点 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

3. 求曲线 $y=\sqrt{x}$ 在点 $x=3$ 处的切线方程.

计算机上的练习

使用数学软件验证本节导数公式表中的公式.

3.2.3 导数的四则运算法则

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合构成初等函数. 初等函数的导数可经过基本初等函数导数的运算而求得. 这样在我们知道基本初等函数的导数公式的前提下，可以求得许多初等函数的导数.

1. 函数和(或差)的求导法则

设 $f(x)$，$g(x)$是可导的，则

$$\boxed{(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x).}$$

即，**两个函数的和(或差)的导数，等于这两个函数的导数和(或差).**

这个法则可推广到任意有限个可导函数的和(或差)，即

$$(f_1\pm f_2\pm\cdots\pm f_n)'=f_1'\pm f_2'\pm\cdots\pm f_n'.$$

2. 函数积的求导法则

设 $f(x)$，$g(x)$是可导的，则

$$\boxed{[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).}$$

即，**两个函数的积的导数，等于第一个函数的导数乘上第二个函数，加上第一个函数乘上第二个函数的导数.**

由上述法则立即可以得出

$$\boxed{[Cf(x)]'=Cf'(x).}$$

即，**常数与函数积的导数，等于常数乘以函数的导数.**

3. 函数商的求导法则

设 $f(x)$，$g(x)$是可导的，且 $g(x)\neq 0$，则

$$\boxed{\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.}$$

特别当 $f(x)\equiv 1$ 时，有

$$\left[\frac{1}{g(x)}\right]'=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

例 1 求多项式函数 $f(x)=2x^5+3x^4-4x^3+5x^2-6x+7$ 的导数.

解：$f'(x)=(2x^5+3x^4-4x^3+5x^2-6x+7)'$

$=(2x^5)'+(3x^4)'-(4x^3)'+(5x^2)'-(6x)'+(7)'$

$=10x^4+12x^3-12x^2+10x-6.$

例 2 求 $y=x\sin x$ 的导数.

解：$y'=(x\cdot\sin x)'$

$=x'\sin x+x(\sin x)'$

$=\sin x+x\cos x.$

例 3 求 $y=\sin 2x$ 的导数.

解：$y'=(2\sin x\cos x)'=2(\cos x\cos x-\sin x\sin x)$

$=2\cos 2x.$

例 4 求 $y=\tan x$ 的导数.

解：$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cos x+\sin x\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$

练习A

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^7+x^6-3x^5$；　　(2) $y=x+x^{-1}$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=(3x^2+2)(x-5)$；　　(2) $y=(5x^3-7)(3x+8)$；

(3) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$；　　(4) $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

练习B

1. 求二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$的导数.

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=x+\sqrt{x}$；　　(2) $y=x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

3. 已知抛物线 $y=x^2+3x-5$，求此抛物线在 $x=3$ 处的切线方程.

习题3-2 A

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=x+x^3+x^5$；　　(2) $y=x^3+\sin x$；

(3) $y=x^3\sin x$；　　(4) $y=(2+3x)(3-5x+x^2)$.

2. 求下列函数在指定点的导数：

(1) $y=x\sin x$，$x=\dfrac{\pi}{4}$；　　(2) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$，$x=1$.

3. 求正弦曲线 $y=\sin 2x$ 在点 $x=\dfrac{\pi}{4}$处的切线方程.

4. 求正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$[0, 2\pi]$内，使 $f'(x)=0$ 的 x 的值. 在这些点，曲线的切线有什么特征?

5. 已知曲线 $y=x^3+3x$，求这条曲线平行于直线 $y=15x+2$ 的切线方程.

6. 已知曲线 $y=2x^3+3x^2-12x+1$，求这条曲线的与 x 轴平行的切线方程.

习题 3-2 B

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=\cos 2x$；　　(2) $y=\sin x(1+\cos x)$；

(3) $y=(x+1)(x+2)(x+3)$.

2. 正切函数 $y=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处的切线方程.

3. 设质点 M 沿 x 轴作直线运动，在时刻 t(s)，质点所在的位置为 $x=t^2-5t+6$(m). 求从 1 s 到 3 s 这段时间内质点 M 的平均速度. 质点 M 在什么时刻的瞬时速度等于这段时间内的平均速度？

3.3 导数的应用

3.3.1 利用导数判断函数的单调性

让我们从一个实际问题谈起.

垂直上抛一小沙袋，沙袋高度 h 是时间 t 的函数，设为

$$h=h(t),$$

其图象如图 3-7 所示. 横坐标轴表示时间，纵坐标轴表示沙袋的高度，设沙袋的最高点为 A，其横坐标为 $t=t_0$.

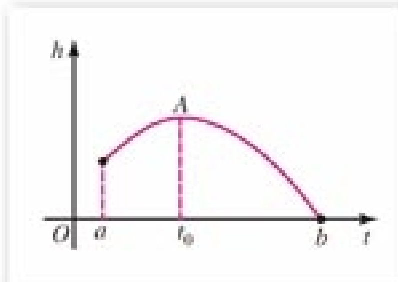


图 3-7

先考察沙袋在区间$(a,\ t_0)$的运动情况：

根据生活经验，我们知道，在这个区间内，沙袋向上运动，其垂直向上的瞬时速度大于 0. 即在$(a,\ t_0)$，

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta t}=h'(t)>0.$$

在此区间内，函数 $h=h(t)$是增函数.

再考察沙袋在区间$(t_0,\ b)$的运动情况：

在这个区间内，沙袋向下运动，其垂直向上的瞬时速度小于 0. 即在区间$(t_0,\ b)$，

$$h'(t)<0.$$

在此区间内，函数 $h=h(t)$是减函数.

从以上实例能够看出，可以通过函数的导数来判断函数的单调性. 一般地，我们得出用函数的导数判断函数单调性的法则：

设函数 $y=f(x)$在区间$(a,\ b)$内可导，

1. 如果在$(a,\ b)$内，$f'(x)>0$，则 $f(x)$在此区间是增函数；

2. 如果在$(a,\ b)$内，$f'(x)<0$，则 $f(x)$在此区间是减函数.

> 左面的法则只说明 $f'(x)>0$(或<0)是函数 $f(x)$为增（减）函数的充分条件，但并不是必要的. 例如，函数 $y=x^3$ 在实数集内是增函数，但有 $f'(0)=0$.

如果函数 $y=f(x)$在 x 的某个开区间内，总有$f'(x)>0$，则$f(x)$在这个区间上是增函数；如果函数当自变量 x 在某开区间上，总有$f'(x)<0$，则$f(x)$在这个区间上是减函数.

例 1 （选择题）如图 3-8，设有定圆 c 和定点O，当 l 从 l_0 开始在平面上绕 O 匀速旋转(旋转角度不超过 $90°$)时，它扫过的圆内阴影部分的面积 S 是时间 t 的函数，它的图象大致是图 3-9 中的（　　）.

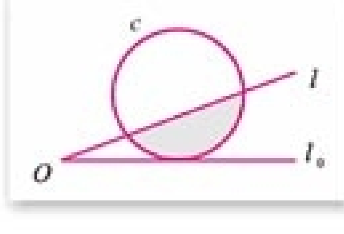


图 3-8

解：由于是匀速旋转，阴影部分面积 $S(t)$ 开始和最后时段缓慢增加，中间时段 S 增速快.

图(A)表示 S 的增速是常数，与实际不符，所以图(A)应否定；

图(B)表示最后时段 S 增速快，也与实际不符，所以(B)也应否定；

图(C)表示开始时段和最后时段 S 的增速比中间时段快，所以也应否定；

图(D)表示开始和结束阶段，S 增速慢，中间时段增速快. 符合实际. 所以应选 (D).

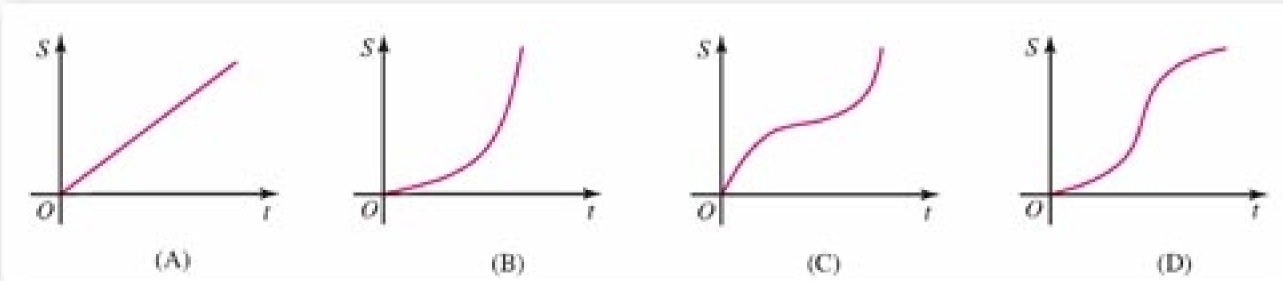


图 3-9

例 2　试确定函数

$$y=x^2-2x+4$$

的单调区间❶.

> 注　❶ 单调区间是指函数在其范围内是增加的或减少的区间.

解：$y'=2x-2$.

令　$2x-2>0$，

解此不等式，得　$x>1$.

因此，已知函数在区间$(1, +\infty)$是增函数.

令　$2x-2<0$，

解此不等式，得　$x<1$.

因此，已知函数在区间$(-\infty, 1)$是减函数(图 3-10).

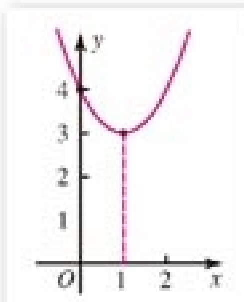


图 3-10

例 3　找出函数 $f(x)=x^3-4x^2+x-1$ 的单调区间.

解：$f'(x)=3x^2-8x+1$.

令　$3x^2-8x+1>0$，

解此不等式，得　$x<\dfrac{4-\sqrt{13}}{3}$ 或 $x>\dfrac{4+\sqrt{13}}{3}$.

因此，$f(x)$在区间$\left(-\infty, \dfrac{4-\sqrt{13}}{3}\right)$和$\left(\dfrac{4+\sqrt{13}}{3}, +\infty\right)$内是增函数.

令　$3x^2-8x+1<0$，

解此不等式，得　$\dfrac{4-\sqrt{13}}{3}<x<\dfrac{4+\sqrt{13}}{3}$.

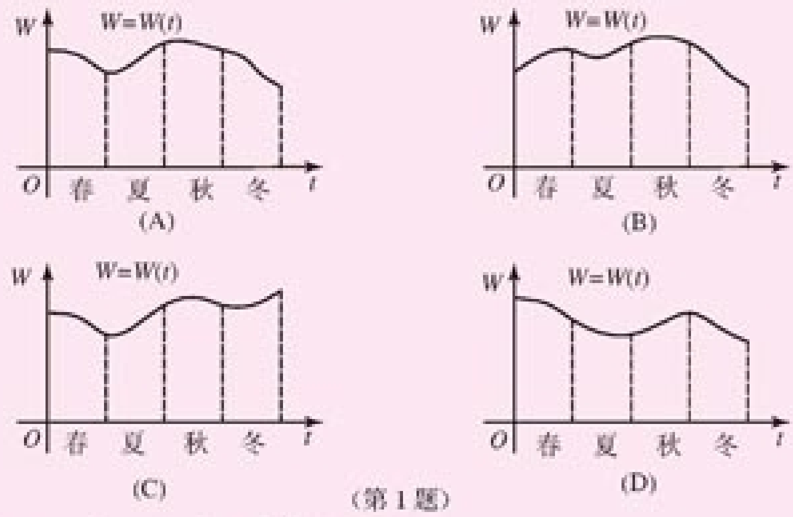
因此，$f(x)$在区间$\left(\dfrac{4-\sqrt{13}}{3}, \dfrac{4+\sqrt{13}}{3}\right)$内是减函数.

计算机上的练习

使用计算机作图软件画出例 2、例 3 中函数的图象，观察它们的单调性.

练习A

1. 一水库的蓄水量一年四季有明显变化. 春季雨量较少，用水最多；夏季雨量最多，用水较少；秋季雨量和用水一般；冬季雨量最少，用水较多. 下列蓄水量(W)与时间(t)关系图中哪一个符合实际？答（　　）.



（第 1 题）

2. 试确定函数 $y=x^2-5x+6$ 的单调区间.
3. 试确定函数 $y=\dfrac{1}{x+1}$ 的单调区间.

练习B

1. 讨论函数 $y=\sin x$ 在区间$(0,\ 2\pi)$的单调性.
2. 讨论函数 $y=x^3-8x^2+13x-6$ 的单调性.
3. 求证：当 $x<2$ 时，$x^3-6x^2+12x-1<7$.

3.3.2 利用导数研究函数的极值

已知函数 $y=f(x)$ 及其定义域内一点 x_0，对于存在一个包含 x_0 的开区间内的所有点 x，如果都有

$$f(x)<f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取**极大值**，记作 $y_{极大值}=f(x_0)$，并把 x_0 称为函数 $f(x)$ 的一个**极大值点**；如果都有

$$f(x)>f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取**极小值**，记作 $y_{极小值}=f(x_0)$，并把 x_0 称为函数 $f(x)$ 的一个**极小值点**.

极大值与极小值统称为**极值**. 极大值点与极小值点统称为**极值点**.

函数 $f(x)$ 的最大(小)值是函数在指定区间的最大(小)的值.

应注意，这里说的极值与最值不同，极值只是相对一点附近的局部性质，而最值是相对整个定义域内或所研究问题的整体的性质.

下面我们研究，如何利用导数求函数的极值.

观察图 3-11，我们可以看到曲线 $y=f(x)$ 在极值点 x_1、x_2、x_3 处的切线与 x 轴平行或重合，即在这些极值点处

$$f'(x_1)=0,\quad f'(x_2)=0,\quad f'(x_3)=0.$$

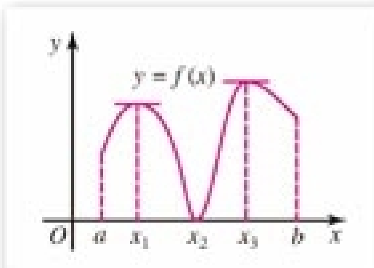


图 3-11

再观察一下在极大值点与极小值点附近函数及其导数的取值情况：

(1) 在 $x=x_1$ 处，$f'(x_1)=0$，在 x_1 左侧 $f'(x)>0$，函数是增加的；在 x_1 右侧 $f'(x)<0$，函数是减少的. x_1 是 $f(x)$ 的极大值点.

(2) 在 $x=x_2$ 处，$f'(x_2)=0$，在 x_2 左侧 $f'(x)<0$，函数是减少的；在 x_2 右侧 $f'(x)>0$，函数是增加的. x_2 是 $f(x)$ 的极小值点.

(3) 在 $x=x_3$ 处，$f'(x_3)=0$，在 x_3 左侧 $f'(x)>0$，函数是增加的；在 x_3 右侧 $f'(x)<0$，函数是减少的. x_3 是 $f(x)$ 的极大值点.

综合以上分析，我们得到求可导函数 $y=f(x)$ 极值的步骤如下：

Ⅰ 求导数 $f'(x)$；

Ⅱ 求方程 $f'(x)=0$ 的所有实数根；

Ⅲ 对每个实数根进行检验，判断在每个根的左右侧，导函数 $f'(x)$ 的符号如何变化. 如果 $f'(x)$ 的符号由正变负，则 $f(x_0)$ 是极大值；如果 $f'(x)$ 的符号由负变正，则 $f(x_0)$ 是极小值.

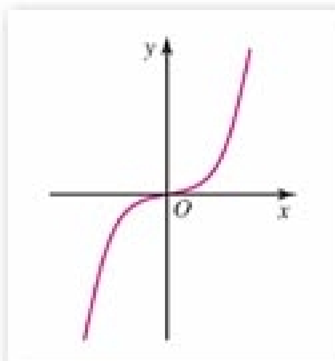


图 3-12

如果在 $f'(x)=0$ 的根 $x=x_0$ 的左右侧符号不变，则 $f(x_0)$ 不是极值. 例如函数 $f(x)=x^3$（图 3-12），有 $f'(0)=0$，但 $x=0$

不是极值点．这就是说，$f'(x)=0$的根不一定是函数的极值点．

如何求函数的最大(小)值呢？假设函数 $y=f(x)$在闭区间$[a，b]$上的图象是一条连续不断的曲线，该函数在$[a，b]$一定能够取得最大值与最小值，若函数在$(a，b)$是可导的，该函数的最值必在极值点或区间端点取得．

例如，函数 $y=f(x)$的图象如图 3-13 所示，函数在 $x=x_0$处取得最小值 $f(x_0)$，在端点 $x=b$ 处取得最大值$f(b)$．

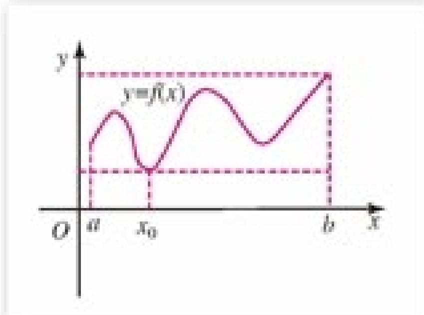


图 3-13

求可导函数 $y=f(x)$在$[a，b]$的最大(小)值步骤如下：

Ⅰ　求 $f(x)$在开区间$(a，b)$内所有极值点；

Ⅱ　计算函数 $f(x)$在极值点和端点的函数值，其中最大的一个为最大值，最小的一个为最小值．

例　已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$．

(1) 求函数的极值；

(2) 求函数在区间$[-3，4]$上的最大值和最小值．

解：(1) $f'(x)=x^2-4$，

解方程　$x^2-4=0$，

得　　$x_1=-2$，　$x_2=2$．

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$变化状态如下表：

x	$(-\infty，-2)$	-2	$(-2，2)$	2	$(2，+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$9\frac{1}{3}$	↘	$-1\frac{1}{3}$	↗

从表上看出，当 $x=-2$ 时，函数有极大值，且

$$f(-2)=\frac{1}{3}\cdot(-2)^3-4\cdot(-2)+4=9\frac{1}{3}.$$

而当 $x=2$ 时，函数有极小值，且

$$f(2)=\frac{1}{3}\cdot 2^3-4\cdot 2+4=-1\frac{1}{3}.$$

函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 的图象如图 3-14 所示．

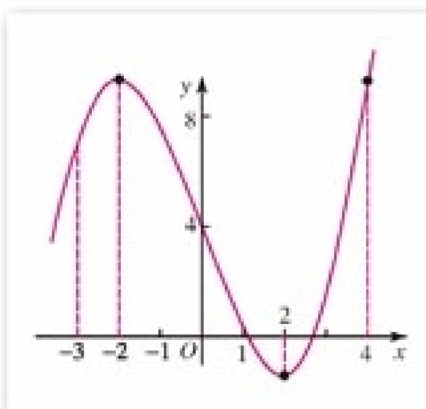


图 3-14

(2) $f(-3)=\frac{1}{3}\cdot(-3)^3-4\cdot(-3)+4=7$，

$f(4)=\frac{1}{3}\cdot 4^3-4\cdot 4+4=9\frac{1}{3}$．

与极值点的函数值比较，得已知函数在区间$[-3，4]$上的最大值是 $9\frac{1}{3}$，最小值是$-1\frac{1}{3}$．

注 在求函数的极值问题时，还要注意观察函数的一些特殊情形. 如图 3-15 所示：

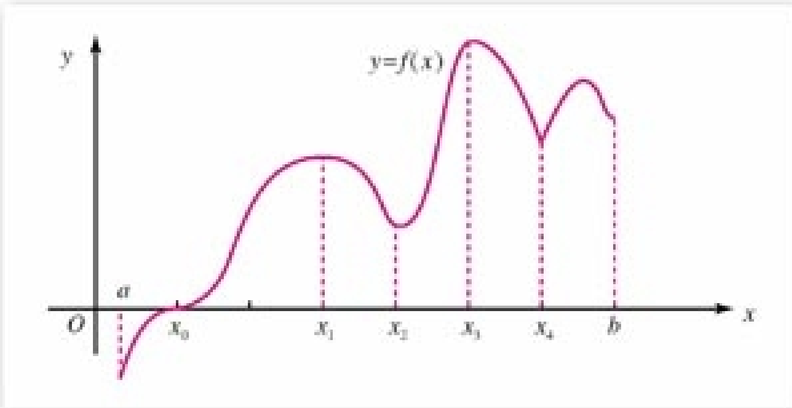


图 3-15

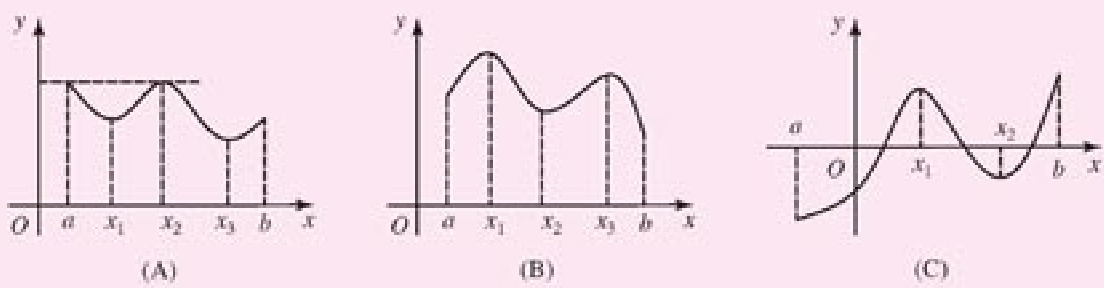
(1) $f'(x)$不存在的点，也有可能是函数的极值点，如图中的 x_4，$f'(x_4)$是不存在的，但 $f(x_4)$是函数的极小值(局部极小值).

(2) $f(x)$的极小值有可能大于 $f(x)$的极大值，如图中所示，$f(x_1)$为极大值，$f(x_4)$为极小值，但 $f(x_4)>f(x_1)$. 这正说明极值是"局部性质".

(3) $f'(x_0)=0$，但是 x_0 不是极值点.

练习A

1. 请根据给出的函数图象指出函数的极值点和最大(小)值点.



(第 1 题)

2. 求下列函数的极值：

(1) $y=x^2-7x+6$；　　　　(2) $y=3x^4-4x^3$；

(3) $y=x+2\sin x$，$x\in(0,\ 2\pi)$.

3. 说明函数 $y=\lg x$，$y=ax+b$ $(a\neq0)$在$(0,\ +\infty)$上没有极值，为什么？

练习B

1. 求函数 $f(x)=2x^3-15x^2+36x-24$ 在区间$\left[1,\ \frac{13}{4}\right]$上的最大值与最小值.
2. 求函数 $f(x)=(x-1)[2x^2-(3a+4)x+9a-4]$在$[0,\ 3]$上的最大值与最小值，其中 $0<a<2$.
3. 求一元二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$的单调区间和最大值、最小值.

3.3.3 导数的实际应用

在经济生活中，人们常常遇到最优化问题. 例如，为使经营利润最大、生产效率最高，或为使用力最省、用料最少、消耗最省等等，需要寻求相应的最佳方案或最佳策略，这些都是最优化问题. 导数是解决这类问题的方法之一. 现在，我们研究几个典型的实际例子.

例 1 有一块边长为 a 的正方形铁板，现从铁板的四个角各截去一个相同的小正方形，做成一个长方体形的无盖容器. 为使其容积最大，截下的小正方形边长应为多少?

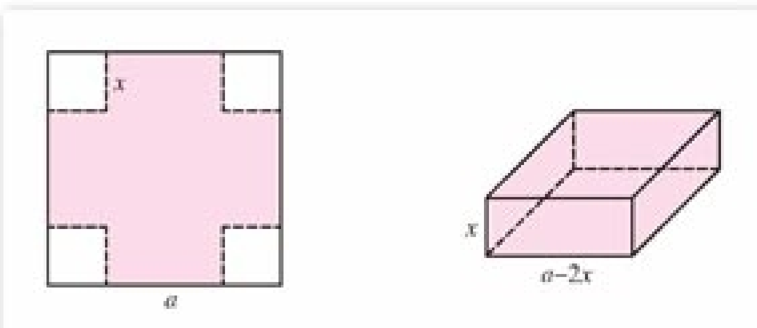


图 3-16

解：设截下的小正方形边长为 x，容器容积为 $V(x)$，则做成的长方体形无盖容器底面边长为$a-2x$，高为 x，

$$V(x)=(a-2x)^2x,\ 0<x<\frac{a}{2}.$$

即

$$V(x)=4x^3-4ax^2+a^2x,\ 0<x<\frac{a}{2}.$$

实际问题归结为求 $V(x)$在区间$\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$上的最大值点. 为此，先求 $V(x)$的极值点. 在开区

间$\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$内，

$$V'(x)=12x^2-8ax+a^2.$$

令$V'(x)=0$，即令　$12x^2-8ax+a^2=0$.

解得　$x_1=\frac{1}{6}a$，$x_2=\frac{1}{2}a$（舍去）.

$x_1=\frac{1}{6}a$在区间$\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$内，$x_1$可能是极值点．且

当$0<x<x_1$时，$V'(x)>0$；

当$x_1<x<\frac{a}{2}$时，$V'(x)<0$.

因此x_1是极大值点，且在区间$\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$内，$x_1$是唯一的极值点，所以$x=x_1=\frac{1}{6}a$是$V(x)$的最大值点.

即当截下的小正方形边长为$\frac{1}{6}a$时，容积最大.

例 2　矩形横梁的强度同它的断面的高的平方与宽的积成正比．要将直径为d的圆木锯成强度最大的横梁，断面的宽度和高度应是多少？

解：如图 3-17 所示，设断面宽为x，高为h，则

$$h^2=d^2-x^2.$$

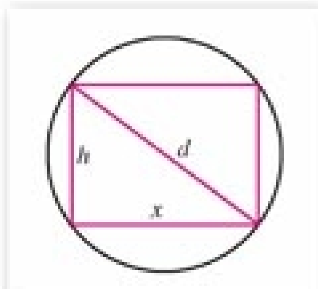


图 3-17

横梁的强度函数为

$$f(x)=kxh^2\ （k\text{为强度系数，}k>0），$$

所以

$$f(x)=kx(d^2-x^2)\ (0<x<d).$$

令　　$$f'(x)=k(d^2-3x^2)=0.$$

解方程$d^2-3x^2=0$，得两个根$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}d$，其中负根没有意义，舍去，所在区间$(0,\ d)$只有一个极大值点

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}d.$$

所以$f(x)$在$x=\frac{\sqrt{3}}{3}d$时取最大值．这时

$$h=\sqrt{d^2-x^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}d.$$

即当宽为$\frac{\sqrt{3}}{3}d$，高为$\frac{\sqrt{6}}{3}d$时，横梁的强度最大.

从以上例题可以看出，求实际问题的最大(小)值，先要建立实际问题的数学模型，写出实际问题中变量之间的函数关系$y=f(x)$，然后再利用导数研究函数的最值.

练习A

1. 设两正数之和为常数 c. 求该两数之积的最大值. 并由此证明不等式

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\ (a,\ b>0).$$

2. 用长度为 l 的铁丝围成长方形，求围成的最大面积.
3. 把长度为 l 的铁丝分成两段，各围成一个正方形，问怎样分法，才能使它们的面积之和最小.

练习B

1. 等腰三角形的周长为 $2p$，问这个等腰三角形围绕底边旋转一周所成的几何体体积最大时，各边长分别是多少？
2. 做一个容积为 216 mL 的圆柱形封闭容器，高与底面直径为何值时，所用材料最省？
3. 一跳水运动员，离开跳板后，他达到的高度与时间的函数关系是

$$h(t)=10-4.9t^2+8t,$$

求该运动员达到的最大高度(距离单位：m，时间单位：s).

4. x_1，x_2，…，x_n 是一组已知数据，令 $s(x)=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\cdots+(x-x_n)^2$，当 x 取何值时，$s(x)$取最小值？

习题 3-3 A

1. 确定下列函数的单调区间：

(1) $y=2x-3$；　　(2) $y=x^2-8x+16$；

(3) $y=(x-1)^3$；　　(4) $y=x^2(x-1)$.

2. 证明函数 $y=2x+\sin x$ 在实数范围内是增函数.
3. 求下列二次函数的极值：

(1) $y=x^2-2x+3$；　　(2) $y=-x^2+2x+5$.

4. 求下列函数的极值：

(1) $y=x^3-x^2-4x+4$；　　(2) $y=2x^2-x^4$；

(3) $y=-x^3+3x-5$；　　(4) $y=4x^3-3x^2-6x+2$.

5. 求下列函数在给定区间的最大值或最小值：

(1) $y=x^2-3x+2$，$x\in[0, 3]$；　(2) $y=x+2\sqrt{x}$，$x\in[0, 4]$；

(3) $y=x^2-2x-1$，$x\in[0, 2]$；　(4) $y=-2x^2+7x-3$，$x\in[0, 2]$.

6. 用边长为 60 cm 的正方形的铁皮做一个无盖水箱，先在四角分别截去相同的小正方形，然后把四边翻转 90°再焊接而成．问水箱底边应取多少，才能使水箱的容积最大？

7. 将长为 72 cm 的铁丝截成 12 段，搭成一个正四棱柱的模型，以此为骨架做成一个容积最大的容器，问铁丝应怎样截法？

习题 3-3 B

1. 求函数 $f(x)=x^3-4x^2+x-1$ 的极值点，以及单调区间，并画出函数草图.

2. 求函数 $y=2x^3-3x^2-12x+8$ 在区间$[-2, 3]$上的最大值和最小值.

3. 一个质点在直线上运动，其任一时刻 t 的位置是

$$f(t)=3t-t^2.$$

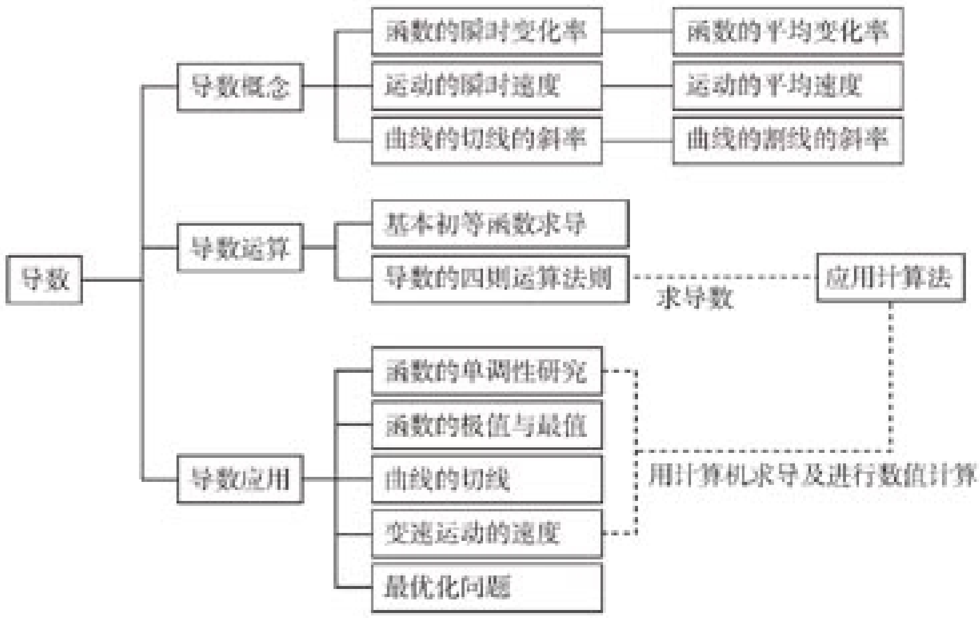
求此质点的最大位移和最大速度(距离单位：cm，时间单位：s).

4. 在等腰梯形 $ABCD$ 中，设上底 $CD=40$，腰 $AD=40$，问 AB 多长时，等腰梯形的面积最大？(提示：设$\angle A=\theta$.)

5. 一正方形内接于另一固定的正方形(顶点分别在四边上)，问内接正方形的一边与固定正方形一边的夹角取什么值时，内接正方形的面积最小？

本章小结

Ⅰ 知识结构



Ⅱ 思考与交流

1. 在导数定义$\left(\text{当}\Delta x\to 0\text{时}, \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to f'(x_0)\text{，即}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)\right)$中，$\Delta x$ 是否允许取零值？取负值？

2. $f'(x_0)$与 $f'(x)$有何不同？$f'(x_0)$与$[f(x)]'_{x=x_0}$所表示的意义一样吗？

3. 一次函数的平均变化率与瞬时变化率相同吗？

4. 正比例函数 $y=kx$ 的瞬时变化率的几何意义是什么？

5. 公式$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{g(x)f'(x)-g(x)f'(x)}{g^2(x)}$成立的条件是什么？

6. 设函数在 x_0 可导，如果对 x_0 附近的 x，都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$，$f'(x_0)$一定为 0 吗？

7. 如果函数 $f(x)$在(a, b)可导，函数的极值必在导数等于 0 的点取得吗？

8. 判断一个点是函数的极值点的条件是什么？

9. 求可导函数 $f(x)$在$[a, b]$的最大(小)值，只需比较在导数等于0的点和区间端点 $f(x)$的值，其中最大(小)者为最大(小)值，这个说法正确吗?

10. 求解实际问题的最大(小)值的主要步骤是什么?

Ⅲ 巩固与提高

1. 一质点沿一纵坐标轴(s轴)运动(轴垂直向上方向为正向)，在时刻 t(s)时，质点的位置 $s=6t-t^2$(m).

(1) 求 $t=0$，2，3，6，7时质点的位置，当 s 值取负值时意味着什么?

(2) 求瞬时速度 v(m/s)在时刻 t 的表示式;

(3) 什么时刻开始改变运动的方向?

2. 在飞轮制动后 t s内飞轮转过的角度(弧度)由函数

$$\varphi(t)=4t-0.3t^2$$

给出，求：飞轮停止转动的时刻及从制动到停止所转过的角度.

3. 求下列函数的导数:

(1) $y=10x^2+3$;　　(2) $y=(4x-3)(2x+5)$;

(3) $y=x^{0.1}$.

4. 求下列函数在给定点的导数:

(1) $f(x)=x^{\frac{1}{4}}$，　$x=5$;

(2) $f(x)=3(x+1)x^2$，　$x=1$;

(3) $f(x)=2x^2+5x-1$，　$x=2$;

(4) $f(x)=(x^2+1)(2x+3)$，　$x=2$.

5. 求下列函数在给定点的切线方程:

(1) $y=9x^2-1$，　$x=\dfrac{1}{3}$;　(2) $y=\ln x$，　$x=1$.

6. 求下列函数的单调区间:

(1) $y=2+x-x^2$;　　(2) $y=\sin x+\cos x$.

7. 求下列函数的极值点和单调区间:

(1) $y=x^3-x+8$;　　(2) $y=\dfrac{1}{x}$.

8. 求函数 $y=2x^3-15x^2+36x-27$ 的极值点和单调区间，并画出这个函数的草图.

9. 在半径为0.5 m的圆桌中心上方安装一吊灯，桌面上灯光的强度是

$$y=k\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

其中 r 是灯与桌面上被照点的距离，φ 是光线与桌面的夹角. 为了使桌面上灯光最亮，吊灯应离桌面多高?

Ⅳ 自测与评估

1. 选择题：

(1) 可导函数在闭区间的最大(小)值必在（　　）取得.

(A) 导数等于0的点

(B) 极值点

(C) 极值点或区间端点

(D) 区间端点

(2) $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$，其中 Δx（　　）.

(A) 恒取正值或恒取负值

(B) 有时可以取0

(C) 恒取正值

(D) 可取正值和负值，但不能取0

(3) 设曲线在某点的切线斜率为0，则此切线（　　）.

(A) 垂直于 x 轴

(B) 垂直于 y 轴

(C) 方向不能确定

(D) 即不平行也不垂直于 y 轴

(4) 设曲线在某点的切线的斜率为负数，则此切线的倾角（　　）.

(A) 小于 90°

(B) 大于 90°

(C) 大于或等于 90°

(D) 小于或等于 90°

(5) $f(x)=x(1-x)^2$ 有（　　）个极值点.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

2. 设 $f(x)=(2-x)(x+2)^2$.

(1) 求 $f(x)$的极大值点与极小值点；

(2) 求 $f(x)$的单调区间；

(3) 求 $f(x)$在$[-5,1]$的最大值与最小值；

(4) 画 $y=f(x)$的草图.

3. 竖直向上弹射一枚无动力火箭，初速度为 $v_0=980$ m/s. 如果不计空气阻力，求火箭上升的最大高度.

数　学　文　化　　　　阅读与欣赏

微积分与极限思想

微积分思想雏形出现得很早，公元前两百多年，希腊科学泰斗阿基米德就用圆的内接正多边形无限逼近圆周，求得圆周率 π 的近似值．阿基米德还用原始的积分观念得到球体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$．他是用球体“薄片”的叠加，并运用杠杆原理得到球的“薄片”相当于球的外切圆柱挖去一个正圆锥相应的“薄片”，从而得出了球体积公式（图 3-18）．这是积分的雏形．在 5 世纪，中国数学家祖冲之、祖暅父子，得出了

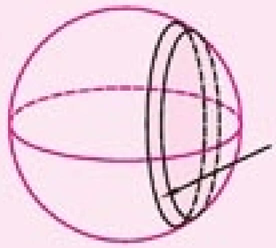


图 3-18

“幂势既同，则积不容异”

的原理，现在我们称它为**祖暅原理**．祖暅原理是说：

如果两物体在等高处的截面积都相等，则两者体积相同．

或者

如果两个平面内的封闭图形在等高处截线段都相等，则两者面积相等（图 3-19）．

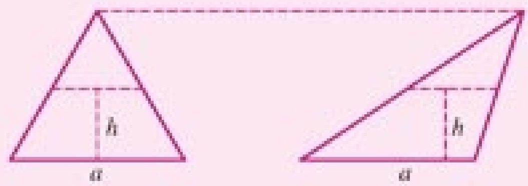


图 3-19

这也是一种朴素的积分思想．

下面，我们再看应用祖暅原理求球体体积的例子．

例　求球体积公式．

分析：下面用祖暅原理，求解半径为 r 的球体的体积．求解分两步：第一步由刘徽完成．他创造了一个新立体图形，称之为“牟合方盖”，并得到了球与“牟合方盖”的体积比为 $\frac{\pi}{4}$．如图 3-20，在一个立方体内作两个互相垂直的内切圆柱，这两个圆柱体相交的部分，就是“牟合方盖”．“牟合方盖”恰好把立方体的内切球包含在内并且同它相切．第二步由祖暅完成．他求出了“牟合方盖”的体积，进而就求出了相应球的体积．

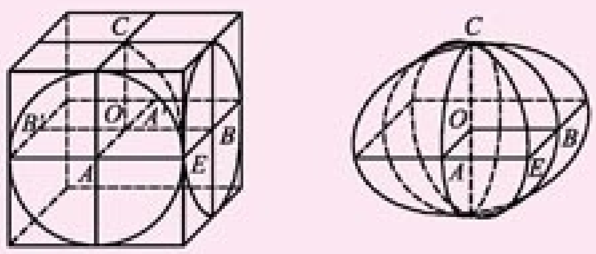


图 3-20

解：用一个水平截面去截“牟合方盖”及其内切球，就得到一个圆（球的截面）和它的外切正方形（牟合方盖的截面）．设圆的半径为 a，则圆的面积等于 πa^2，外切正方形的面积等于 $4a^2$，于是得到在每一高度的水平截面截出的圆面与其外切正方形的面积比等于 $\frac{\pi}{4}$．根据祖暅原理，球与“牟合方盖”的

体积比也为$\frac{\pi}{4}$.

取“牟合方盖”的八分之一，然后作它的外切正方体，作以外切正方体的上底面为底以该正方体一边为垂直边的倒方锥(图3-21)，则这个倒方锥的体积等于$\frac{1}{3}r^3$. 把这个

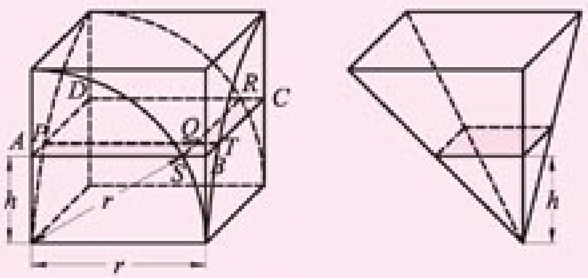


图3-21

倒方锥与外切正方体放在同一平面上，用高度为h的水平截面，截倒方锥的截面面积为h^2，截外切正方体的截面面积为r^2，截“牟合方盖”的截面为正方形$PQRD$，设$AS=PQ=x$，则多边形$ABCRQP$的面积为

$$S_{ABCD}-S_{PQRD}=r^2-x^2=h^2,$$

于是在任一相同的高处，外切正方体中挖去“牟合方盖”的部分的截面面积都与倒方锥的截面面积相等. 根据祖暅原理，外切正方体中挖去“牟合方盖”的部分的体积与倒方锥的体积相等. 所以八分之一“牟合方盖”的体积等于外切正方体的体积r^3减去倒方锥的体积$\frac{1}{3}r^3$. 所以

$$V_{球}=\frac{\pi}{4}V_{牟合方盖}=\frac{\pi}{4}\cdot 8\cdot\left(r^3-\frac{1}{3}r^3\right)=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

导数的观念发生比较晚. 在16世纪，伽利略发现了自由落体运动的规律：

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

这个变速运动的瞬时速度是s对t的平均变化率

$$\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=\frac{1}{2}g\,\frac{(t_0+\Delta t)^2-t_0^2}{\Delta t}$$
$$=gt_0+\frac{1}{2}g\Delta t.$$

当$\Delta t\to 0$时，平均变化率趋向常数gt_0. 这是导数概念的启蒙.

16世纪初，笛卡儿建立了坐标系，使几何图形能够用函数表示. 函数也可以用几何图形直观地表示. 人们在探求曲线$y=f(x)$的切线的时候，发现切线可由割线逼近而得. 割线的斜率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

当$\Delta x\to 0$时，上述割线的斜率趋近的常数就是切线的斜率.

求变速运动的瞬时速度和求曲线切线的斜率是产生导数概念的直接动因.

在16世纪与17世纪之交，微积分观念得到了一定的发展与广泛的应用. 在此基础上，两位科学巨匠牛顿和莱布尼兹分别独立地创造了微积分学. 他们不仅提出了完整的微分与积分概念，建立了比较完整的学科体系，而且把微积分运算广泛应用于物理学、力学、几何学与函数分析，获得了巨大的成功. 牛顿和莱布尼兹对微积分学最突出的贡献是，他们发现了微分与积分的内在联系，建立了微积分基本定理：如果$F'(x)=f(x)$，$f(x)$是可积的，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

这样，困难的求积分问题就转化为求被积函数$f(x)$的原函数$F(x)$问题. 这是微积分学历史上最重大的事件.

有了微积分基本定理，微积分学从繁琐的计算中解脱出来，使它逐步被人们所应用、所接受.

导数也叫微商. 函数在某一点的导数与自变量增量之积$f'(x_0)\Delta x$叫做微分，它是函数相应的增量的近似值. 求导数实际上就是求微分. 微分与积分互为逆运算，联系非常紧密. 因此人们把关于微分与积分的一门学科叫做微积分学.

附 录

部分中英文词汇对照表

逻辑联结词	logical connective
或	or
且	and
非	not
原命题	original proposition
逆命题	inverse proposition
否命题	negative proposition
逆否命题	inverse and negative proposition
充分条件	sufficient condition
必要条件	necessary condition
充要条件	sufficient and necessary condition
坐标法	method of coordinate
圆锥曲线	conic
椭圆	ellipse
焦点	focus，focal points
焦距	focal length
离心率	eccentricity
双曲线	hyperbola
渐近线	asymptote
抛物线	parabola
准线	directrix
极限	limit
无穷大	infinity
导数	derivative
导函数	derived function
极大值	maximum value
极小值	minimum value

后 记

根据教育部制订的普通高中各学科课程标准（实验），人民教育出版社课程教材研究所编写的各学科普通高中课程标准实验教科书，得到了诸多教育界前辈和各学科专家学者的热情帮助和大力支持。在各学科教科书终于同课程改革实验区的师生见面时，我们特别感谢担任教科书总顾问的丁石孙、许嘉璐、叶至善、顾明远、吕型伟、王梓坤、梁衡、金冲及、白春礼、陶西平同志，感谢担任教科书编写指导委员会主任委员的柳斌同志和编写指导委员会委员的江蓝生、李吉林、杨焕明、顾泠沅、袁行霈等同志。

本套高中数学实验教科书（B版）的总指导为丁尔陞教授。从教材立项、编写、送审到进入实验区实验的过程中，在丁尔陞、孙瑞清、江守礼、房艮孙、王殿军等专家教授的指导下，经过实验研究组全体成员的努力，基本上完成了“课标”中各模块的编写任务，并通过了教育部的审查。

山东、辽宁等实验区的教研员和教师在实验过程中，对教材编写的指导思想、教材内容的科学性、基础性、选择性以及是否易教、易学等诸方面，进行了审视和检验，提出了许多的宝贵意见，并针对教材和教学写出了大量的论文。我们在总结实验的基础上，逐年对教材进行认真的修改，使教材不断的完善。现在所取得的成果，是实验研究组全体成员、编者，实验区的省、市、县各级教学研究员及广大数学教师集体智慧的结晶。

各实验区参加教材审读、研讨及修改的主要成员有：

韩际清、常传洪、尹玉柱、秦玉波、祝广文、尚凡青、杨长智、田明泉、邵丽云、于世章、李明照、胡廷国、张颖、张成钢、李学生、朱强、窦同明、姜传祯、韩淑勤、王宗武、黄武吕。

刘莉、宋明新、高锦、赵文莲、王孝宇、周善富、胡文亮、孙家逊、舒风杰、齐力、林文波、教丽、刘鑫、李凤、金盈、潘戈、高钧、魏明智、刘波、崔贺、李忠、关玲、郝军、郭艳霞、董晖、赵光千、王晓声、王文、姚琳。

在此，特向参与、帮助、支持这套教科书编写的专家、学者和教师深表谢意。

我们还要感谢实验区的教育行政和教研部门，以及使用本套教材的师生们。

让我们与一切关心这套教材建设的朋友们，共同携起手来，为建设一套具有中国特色的高中数学教材而努力。

我们的联系方式如下：

电话：010-58758523　010-58758532

电子邮件：longzw@pep.com.cn

人民教育出版社　课程教材研究所

中学数学教材实验研究组